复旦大学高等代数

习题集

2022 版

谢启鸿　编著

前　　言

从 2014 年初至今, 编者每学期都在复旦大学数学科学学院开展了高等代数每周一题活动. 顾名思义, 这一活动就是每一教学周发布一道具有相当难度的高等代数思考题, 供学有余力的学生思考和解答, 旨在通过“难题征解”和“一题多解”等模式激发学生的学习动力和创新潜力.

高等代数每周一题活动现已经历了复旦数学学院 13 级到 21 级共 9 个年级的实践. 9 年间, 编者总会在周末发布下周的思考题, 题目的侧重点通常与下周的授课内容密切相关, 可以让学生带着问题进行预习和思考. 复旦数学学院 13 级到 16 级的每周一题通过高等代数博客和微信群同时发布, 学生提交纸质解答; 17 级到 21 级的每周一题通过高等代数博客、微信群以及在线课群同时发布, 学生在在线课群中提交图片解答. 9 年来, 编者都一直认真批改学生的解答, 并及时反馈给他们各种意见和建议. 实践证明, 高等代数每周一题活动不仅增进了师生之间的交流与互动, 而且取得了较好的教学效果.

编者自 2009 年初回到复旦数学学院任教后, 一直从事高等代数课程的教学工作, 并积极推动高等代数课程的教学改革与实践. 考试命题作为教学工作的重要环节, 编者也在这方面作了初步的探索. 从某种意义上说, 高等代数每周一题恰好为考试命题的改革创新提供了充分实践的良机. 作为现代数学基石之一的高等代数 (线性代数), 无论是课堂教学, 还是习题考题, 都可从现代数学的各个分支领域出发, 以较高的观点进行讲授和命题. 因此, 编者在编撰每周一题的过程中, 特别注重以科研为指导, 努力将高等代数与后续专业课程紧密结合起来, 尽力展示代数学独特的思想、方法和技巧.

编者现将高等代数每周一题 (252 道)、复旦高等代数期末考试压轴大题 (42 道) 和期中考试精选大题 (108 道) 整理成“复旦大学高等代数习题集”, 其中约 40% 的题目由编者自编或改编而来, 剩余 60% 的题目选自各兄弟院校的高等代数习题或考研试题.

为方便读者学习和参考, 本习题集还给出了所有题目的解答或提示. 编者将在每年下半年更新一次习题集, 加入最新的高等代数每周一题、期末考试压轴题和期中考试精选题, 并计划在若干年后出版这本全新的高等代数习题集.

本习题集的编写得到了复旦大学数学科学学院的资助; 复旦大数据学院邵美悦教授给每周一题活动提出了许多建设性的意见; 复旦数学学院楼红卫教授向编者提供了数道高等代数习题; 复旦数学学院代数教学团队吴泉水教授、陈猛教授和朱胜林教授, 十几年来给予编者热心的指导和鼓励, 在此谨向他们表示衷心的感谢! 由于编者水平有限, 错误在所难免, 敬请广大读者和同行专家提出宝贵的批评意见和建议.

谢启鸿

2022 年 10 月

目　　录

第一章　复旦大学高等代数每周一题

§ 1.1　13 级高等代数 II 每周一题

[问题 2014S01] 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是次数等于 2 的 n 元实系数多项式, S 是使得 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 达到最大值或最小值的点的集合. 若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是关于未定元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的对称多项式并且 S 为有限非空集合, 证明: 存在 $b \in \mathbb{R}$, 使得

$$S = \{(b, b, \cdots, b)\}.$$

[问题 2014S02] 设实系数多项式

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

其中 $a_n b_m \neq 0$, $n \geq 1$, $m \geq 1$. 设 t 为实变元,

$$g_t(x) = b_m x^m + (b_{m-1} + t) x^{m-1} + \cdots + (b_1 + t^{m-1}) x + (b_0 + t^m).$$

证明: 存在正数 δ, 使得对任意的 $0 < |t| < \delta$, $f(x)$ 都与 $g_t(x)$ 互素.

[问题 2014S03] 设 $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R})$ 是非异阵, 并且 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值都是实数. 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶主子式之和等于零, 证明: 存在 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $n-2$ 阶主子式, 其符号与 $|\boldsymbol{A}|$ 的符号相反.

[问题 2014S04] 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, $f(x)$ 为复系数多项式, 证明: $2n$ 阶复方阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & f(\boldsymbol{A}) \\ f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 也可对角化.

[问题 2014S05] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 4×3 和 3×4 实矩阵, 满足

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-9&-20&-35\\2&5&7\\2&4&8\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}9a-14&0&9a-15&18a-32\\6a+2b-9&1&6a+3b-9&12a+4b-19\\-2a+2&0&-2a+3&-4a+4\\-3a+6&0&-3a+6&-6a+14\end{pmatrix},$$

试求参数 a,b 的值.

[问题 2014S06] 试用有理标准型理论证明 13 级高等代数 I 期末考试第八大题: 设 V 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 为 V 上的线性变换, 且存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 使得 $V=L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots)$. 设 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征多项式, 并且 $f(x)$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上至少有两个互异的首一不可约因式, 证明: 存在非零向量 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$, 使得

$$V=L(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\beta}),\cdots)\oplus L(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\gamma}),\boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\gamma}),\cdots).$$

[问题 2014S07] 设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{K})$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上的初等因子组为 $P_1(\lambda)^{e_1}$, $P_2(\lambda)^{e_2}$, $\cdots$, $P_k(\lambda)^{e_k}$, 其中 $P_i(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式, $e_i\geq 1\,(1\leq i\leq k)$. 设 $\boldsymbol{C}(P_i(\lambda)^{e_i})$ 为相伴于多项式 $P_i(\lambda)^{e_i}$ 的友阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{K}$ 上相似于分块对角阵

$$\mathrm{diag}\{\boldsymbol{C}(P_1(\lambda)^{e_1}),\boldsymbol{C}(P_2(\lambda)^{e_2}),\cdots,\boldsymbol{C}(P_k(\lambda)^{e_k})\}.$$

试用上述结论证明第三届全国大学生数学竞赛预赛一道试题: 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可逆阵, $\boldsymbol{C}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的幂零阵, 即存在 $m\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $\boldsymbol{C}^m=\boldsymbol{O}$.

[问题 2014S08] 设分块上三角阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix},$$

其中 m 阶方阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_1$, n 阶方阵 $\boldsymbol{A}_2$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_2$, 并且 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 没有公共的特征值. 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型就是 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2\}$.

[问题 2014S09] 证明: n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与所有的 $\boldsymbol{A}^m\,(m\geq 1)$ 都相似的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_1}(1),\cdots,\boldsymbol{J}_{r_k}(1),0,\cdots,0\}$. 特别地, 非异阵 $\boldsymbol{A}$ 与所有的 $\boldsymbol{A}^m\,(m\geq 1)$ 都相似的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1.

[问题 2014S10] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 证明: $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\big((\boldsymbol{AB})^i\big)=\operatorname{rank}\big((\boldsymbol{BA})^i\big),\ 1\leq i\leq n-1.$$

[问题 2014S11] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称阵, $p(\boldsymbol{A}),q(\boldsymbol{A})$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的正负惯性指数, 证明:

$$p(\boldsymbol{A})+p(\boldsymbol{B})\geq p(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),\quad q(\boldsymbol{A})+q(\boldsymbol{B})\geq q(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}).$$

[问题 2014S12] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶半正定实对称阵, 证明: $\boldsymbol{AB}$ 的所有特征值都是非负实数. 进一步, 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正定实对称阵, 证明: $\boldsymbol{AB}$ 的所有特征值都是正实数.

[问题 2014S13] (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶非异阵, 若存在主对角元全为 1 的下三角阵 $\boldsymbol{L}\in M_n(\mathbb{K})$ 以及上三角阵 $\boldsymbol{U}\in M_n(\mathbb{K})$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$, 则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 存在 LU 分解 (L 表示下三角, U 表示上三角). 证明: n 阶非异阵 $\boldsymbol{A}$ 存在 LU 分解的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个顺序主子式都不等于零. 此时, $\boldsymbol{A}$ 的 LU 分解是唯一的.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定实对称阵, 证明: 存在唯一的主对角元全大于零的上三角阵 $\boldsymbol{C}\in M_n(\mathbb{R})$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$. 正定实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的上述分解称为 Cholesky 分解.

[问题 2014S14] 设 V 为酉空间, 证明: 不存在 V 上的非零线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$, 使得对 V 中任一向量 $\boldsymbol{v}$, 均有

$$(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v})=0.$$

[问题 2014S15] 设 $\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶正交阵, $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为实对角阵, $m=\min\limits_{1\leq i\leq n}|a_i|$, $M=\max\limits_{1\leq i\leq n}|a_i|$. 证明: 方阵 $\boldsymbol{QA}$ 的特征值 λ_j 适合不等式:

$$m\leq|\lambda_j|\leq M,\ 1\leq j\leq n.$$

♣ ♣ ♣

§ 1.1 解答或提示

[问题 2014S01] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3594572.html.

[问题 2014S02] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3613136.html.

[问题 2014S03] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3620142.html, 或高代白皮书例 6.28.

[问题 2014S04] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3633949.html, 或高代白皮书例 6.56 (特殊情形).

[问题 2014S05] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3645057.html.

[问题 2014S06] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3659954.html, 或高代白皮书例 7.20.

[问题 2014S07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3674990.html, 或高代白皮书例 7.19.

[问题 2014S08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3690857.html, 或高代白皮书例 7.56.

[问题 2014S09] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3705156.html, 或高代白皮书例 7.7 (充分性).

[问题 2014S10] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3720549.html.

[问题 2014S11] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3734070.html, 或高代白皮书例 8.39.

[问题 2014S12] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3751357.html, 或高代白皮书例 9.64.

[问题 2014S13] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3762452.html, 或高代教材第八章复习题 1 (高代白皮书例 8.12) 和复习题 2.

[问题 2014S14] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3774776.html, 或高代白皮书例 9.10.

[问题 2014S15] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3775730.html, 或高代白皮书例 9.47.

§ 1.2 14 级高等代数 I 每周一题

[问题 2014A01] 求下列 n 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a)\\ 1 & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a)\end{vmatrix}.$$

[问题 2014A02] 求下列 n 阶行列式的值, 其中 $a_i\neq 0\,(1\le i\le n)$:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_{n-1} & a_1+a_n\\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_{n-1} & a_2+a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1}+a_1 & a_{n-1}+a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1}+a_n\\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & a_n+a_{n-1} & 0\end{vmatrix}.$$

[问题 2014A03] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n\,(n\ge 3)$ 阶方阵, A_{ij} 为第 (i,j) 元素 a_{ij} 在 $|\boldsymbol{A}|$ 中的代数余子式, 证明:

$$\begin{vmatrix}A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2}\\ A_{23} & A_{33} & \cdots & A_{n3}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}|\boldsymbol{A}|^{n-2}.$$

[问题 2014A04] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶方阵.

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 证明: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$.

(2) 若存在正整数 k, 使得 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{O}$, 证明: $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA}$ 是可逆阵.

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 均为可逆阵, 证明: $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}$ 也是可逆阵, 并求其逆阵.

[问题 2014A05] (1) 设 $x_1,x_2\cdots,x_n,x$ 都是未定元, $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k\,(k\ge 1)$,

$s_0 = n$, 试求下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 试求下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & a_{12} & & \cdots & & a_{1n} & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ & & a_{11} & & & a_{12} & & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{22} & & \cdots & & a_{2n} & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ & & a_{21} & & & a_{22} & & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{n2} & & \cdots & & a_{nn} & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ & & a_{n1} & & & a_{n2} & & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中每个 a_{ij} 各重复 m 次.

[问题 2014A06] 若 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{I}_n$, 则称为正交矩阵. 证明: 不存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 满足 $\boldsymbol{A}^2 = c\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2$, 其中 c 是非零常数.

[问题 2014A07] 设 $\boldsymbol{A}$ 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 4 阶方阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的 4 维列向量, 满足:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_4,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_4 = -\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_4.$$

证明: 若 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{0}$, 则 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 是列向量空间 $\mathbb{Q}^4$ 的一组基.

[问题 2014A08] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 定义函数

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

设 $\boldsymbol{P}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶非异阵, 满足: 对任意的 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{K})$, 成立 $f(\boldsymbol{PAP}^{-1})=f(\boldsymbol{A})$. 证明: 存在非零常数 $c\in\mathbb{K}$, 使得 $\boldsymbol{PP}'=c\boldsymbol{I}_n$.

[问题 2014A09] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 3×2, 2×3 矩阵, 满足

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

试求 $\boldsymbol{BA}$.

[问题 2014A10] 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{I}_n$ (即 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵), 证明:

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}\left((\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^2\right).$$

[问题 2014A11] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$, 证明:

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}.$$

[问题 2014A12] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^2)$, 证明:

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}).$$

[问题 2014A13] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的幂零线性变换, 满足 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\varphi})=n-1$, 求证: V 是关于线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 的循环空间, 即存在向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 使得

$$V=L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\boldsymbol{\varphi}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\varphi}^{n}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots).$$

♣ ♣ ♣

§ 1.2 解答或提示

[问题 2014A01] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4019085.html, 或高代白皮书第 1 章解答题 15.

[问题 2014A02] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4033367.html, 或高代白皮书例 1.33 (三种证法).

[问题 2014A03] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4050277.html, 或高代白皮书例 2.39.

[问题 2014A04] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4067065.html, 或高代白皮书例 2.25.

[问题 2014A05] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4083312.html, 或高代白皮书第 2 章解答题 7 和例 6.98 (8).

[问题 2014A06] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4099074.html, 或高代白皮书第 2 章解答题 10.

[问题 2014A07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4114780.html, 其推广可参考高代白皮书例 5.80.

[问题 2014A08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4131112.html, 或高代白皮书第 2 章解答题 15.

[问题 2014A09] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4149144.html, 或高代白皮书例 3.94.

[问题 2014A10] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4159765.html, 或高代白皮书第 3 章解答题 8.

[问题 2014A11] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4175420.html, 或高代白皮书第 3 章解答题 9.

[问题 2014A12] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4188685.html, 或高代白皮书例 7.68.

[问题 2014A13] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4190136.html, 或高代白皮书例 4.9.

§ 1.3 14 级高等代数 II 每周一题

[问题 2015S01] 设 $M_n(\mathbb{R})$ 是 n 阶实方阵全体构成的实线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的线性变换, 使得对于任意的 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{R})$, 或者 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{B})$ 成立, 或者 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A})$ 成立. 证明: 或者 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{B})$ 对任意的 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{R})$ 都成立, 或者 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A})$ 对任意的 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{R})$ 都成立.

[问题 2015S02] 设复数 a, b, c 满足 $bc \neq 0$, 证明下列 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{pmatrix}.$$

[问题 2015S03] 设 $g(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式, V 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 中的向量, 满足:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\alpha}_3,\ \cdots,\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}) = \boldsymbol{\alpha}_n,\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}_n) = -a_n\boldsymbol{\alpha}_1 - a_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - a_1\boldsymbol{\alpha}_n.$$

证明: 若 $g(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 上不可约, 则 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 V 的一组基. 举例说明: 若 $g(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 上可约, 则上述结论一般并不成立.

[问题 2015S04] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, $\boldsymbol{C}$ 为 $k \times n$ 矩阵, 满足: 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$ 均为列满秩阵. 证明: 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_n) \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_n)^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_n)^{n-1} \end{pmatrix}$ 均为列满秩阵.

[问题 2015S05] 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复方阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 相似于

某个如下的循环矩阵:

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

[问题 2015S06] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换.

(1) 求证: 对任一非零向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, $U=L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots)$ 是包含 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最小的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间. 子空间 U 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于 $\boldsymbol{\varphi}$ 的循环子空间, $\boldsymbol{\alpha}$ 称为循环子空间 U 的循环向量. 若设 $\dim U=m$, 则 $\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\boldsymbol{\varphi}^{m-1}(\boldsymbol{\alpha})\}$ 是 U 的一组基.

(2) 利用 (1) 的结论证明 Cayley-Hamilton 定理.

(3) 求证: V 只有平凡的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间当且仅当对任一非零向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\boldsymbol{\alpha}$ 关于 $\boldsymbol{\varphi}$ 的循环子空间都等于 V.

(4) 证明: V 只有平凡的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda I_V-\boldsymbol{\varphi}|$ 是 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式.

[问题 2015S07] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, 证明: 存在 n 阶非异复对称阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 可通过非异复对称阵相似于其转置 $\boldsymbol{A}'$.

[问题 2015S08] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, 证明: $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}$ 与 $\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$ 相似, 其中 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的共轭.

[问题 2015S09] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶复方阵, 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\leq 1$, 证明: $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可同时上三角化.

[问题 2015S10] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵, 证明: 存在 n 阶非异实对称阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 可通过非异实对称阵相似于其转置 $\boldsymbol{A}'$.

[问题 2015S11] 证明: 任一复方阵都相似于一个复对称阵. 举例说明: 存在实方阵, 它不相似于实对称阵.

[问题 2015S12] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵, 若对任意的非零 n 维实列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 总有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}>0$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为亚正定阵. 显然, 如果 $\boldsymbol{A}$ 既是实对称阵, 又是亚正定阵, 那么 $\boldsymbol{A}$ 就是正定阵. 以下设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶亚正定阵, c 是正实数, 求证:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是亚正定阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'$ 是正定阵;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部都大于零, 特别地, $|\boldsymbol{A}|>0$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $c\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^*$ 都是亚正定阵;

(4) 若 $\boldsymbol{C}$ 是 n 阶非异实方阵, 则 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 是亚正定阵;

(5) 若 $\boldsymbol{B}$ 是实对称阵且 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是亚正定阵, 则 $\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是亚正定阵.

[问题 2015S13] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶实矩阵, 定义函数

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

设 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶非异实矩阵, 满足: 对任意的 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{R})$, 成立 $f(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1})=f(\boldsymbol{A})$. 试用伴随算子或奇异值分解证明: 存在非零实数 c, 使得 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}'=c\boldsymbol{I}_n$.

[问题 2015S14] 设 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 为 $2n$ 阶实矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{J}$, 证明:

$$\det(\boldsymbol{A})=1.$$

♣ ♣ ♣

§ 1.3 解答或提示

[问题 2015S01] 对任意取定的 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{R})$, 设 $U_{\boldsymbol{A}}=\{\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{R})\mid\varphi(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\varphi(\boldsymbol{A})\varphi(\boldsymbol{B})\}$, $V_{\boldsymbol{A}}=\{\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{R})\mid\varphi(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\varphi(\boldsymbol{B})\varphi(\boldsymbol{A})\}$, 则容易验证 $U_{\boldsymbol{A}},V_{\boldsymbol{A}}$ 都是 $M_n(\mathbb{R})$ 的子空间且 $M_n(\mathbb{R})=U_{\boldsymbol{A}}\cup V_{\boldsymbol{A}}$. 由高代白皮书例 3.54 可知, $U_{\boldsymbol{A}},V_{\boldsymbol{A}}$ 中至少有一个是全子空间. 设 $U=\{\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{R})\mid U_{\boldsymbol{A}}=M_n(\mathbb{R})\}$, $V=\{\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{R})\mid V_{\boldsymbol{A}}=M_n(\mathbb{R})\}$, 则容易验证 U,V 都是 $M_n(\mathbb{R})$ 的子空间且 $M_n(\mathbb{R})=U\cup V$. 再次由高代白皮书例 3.54 可知, U,V 中至少有一个是全子空间. 若 $U=M_n(\mathbb{R})$, 则 $\varphi(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\varphi(\boldsymbol{A})\varphi(\boldsymbol{B})$ 对任意的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{R})$ 成立, 若 $V=M_n(\mathbb{R})$, 则 $\varphi(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\varphi(\boldsymbol{B})\varphi(\boldsymbol{A})$ 对任意的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{R})$ 成立. 也可用多元多项式的整性来证明本题.

[问题 2015S02] 参考高代白皮书例 6.65.

[问题 2015S03] 参考高代白皮书例 5.80.

[问题 2015S04] 参考高代白皮书例 6.95.

[问题 2015S05] 参考高代白皮书例 6.55 的推论.

[问题 2015S06] 参考高代白皮书例 7.12, 例 7.17 和教学论文 [17].

[问题 2015S07] 参考高代白皮书例 7.74.

[问题 2015S08] 利用子式判别法或相抵标准型都能证明: 矩阵与其共轭具有相同的秩. 注意到 $\overline{\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}}=\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$, 故 $\operatorname{rank}\big((\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}})^k\big)=\operatorname{rank}\big((\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A})^k\big)\ (k\geq 1)$, 于是由 [问题 2014S10] 的结论可知, $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}$ 与 $\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$ 相似.

[问题 2015S09] 参考教学论文 [19] 的例 4.

[问题 2015S10] 参考教学论文 [18] 的例 2.

[问题 2015S11] 参考高代白皮书例 8.21. 不可对角化的实矩阵都不能相似于实对称阵.

[问题 2015S12] 参考高代白皮书第 6 章解答题 3, 例 8.58 和第 8 章解答题 11.

[问题 2015S13] 参考高代白皮书第 2 章解答题 15 的证法 2 和证法 3.

[问题 2015S14] 参考高代白皮书例 9.134.

§ 1.4　15 级高等代数 I 每周一题

[问题 2015A01] 证明: 第三类分块初等变换是若干个第三类初等变换的复合. 特别地, 第三类分块初等变换不改变行列式的值.

[问题 2015A02] 设 $n\,(n\geq 2)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}(x))$, 其中每个元素 $a_{ij}(x)$ 都是关于未定元 x 的多项式. 若 k 是正整数, 满足 x^k 整除 $\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式 A_{ij}, 证明: x^{k+1} 整除 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

[问题 2015A03] 设

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix},$$

证明: $\mathrm{r}(\boldsymbol{M})\geq n-1$.

[问题 2015A04] 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵, 试用秩的子式判别法和 Cauchy-Binet 公式证明: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}')=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

[问题 2015A05] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵, 形式上约定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}_n$.

(1) 若 k 是非负整数, 使得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1})$, 证明: 对任意的 $i\geq k$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^i)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)$.

(2) 记 $s(\boldsymbol{A})=\min\{k\in\mathbb{N}\mid \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1})\}$, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的稳定指数, 意味着从 $i\geq s(\boldsymbol{A})$ 开始, $\boldsymbol{A}^i$ 的秩保持稳定了, 这个最终稳定的秩记为 $\mathrm{r}_\infty(\boldsymbol{A})$, 即 $\mathrm{r}_\infty(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^i)\,(i\geq s(\boldsymbol{A}))$. 证明: $s(\boldsymbol{A})$ 必存在, 并且是 0 和 n 之间的某个自然数.

(3) 证明: $\mathrm{r}_\infty(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\mathrm{r}_\infty(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$.

(4) 证明: $|s(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})-s(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})|\leq 1$, 并举例说明可取到 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 使得 $|s(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})-s(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})|=1$.

[问题 2015A06] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵, A_{ij} 表示元素 a_{ij} 对应的代数余子式. 设 $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n$, $1\leq j_1<j_2<\cdots<j_r\leq n$ 为两组给定的指标集, 证明:

$$\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} A_{i_1j_1} & A_{i_2j_1} & \cdots & A_{i_rj_1} \\ A_{i_1j_2} & A_{i_2j_2} & \cdots & A_{i_rj_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i_1j_r} & A_{i_2j_r} & \cdots & A_{i_rj_r} \end{vmatrix}=\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}|\boldsymbol{A}|^{r-1}.$$

[问题 2015A07] 设 V 是 $M_n(\mathbb{K})$ 的子空间, 满足 V 中所有的非零矩阵都是非异阵, 证明: $\dim_{\mathbb{K}} V \leq n$.

[问题 2015A08] 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $\boldsymbol{\varphi}^m = \mathbf{0}$, 其中 m, q 为正整数, $n = mq + 1$. 证明: $\dim \operatorname{Im} \boldsymbol{\varphi} \leq n - q - 1$.

[问题 2015A09] 定义: 线性空间 V 中的一族向量 $B = \{\boldsymbol{e}_i\}_{i \in I}$ 称为线性无关的, 如果 B 中任意有限个向量都是线性无关的. $B = \{\boldsymbol{e}_i\}_{i \in I}$ 称为线性空间 V 的一组基, 如果 B 是线性无关的, 并且 $V = L(B)$, 即 V 中任一向量都是 B 中有限个向量的线性组合. 利用 Zorn 引理或选择公理可证明任一线性空间 V 中都存在一组基 B (在抽象代数课中会给出证明, 大家现在予以承认即可).

(1) 证明: $\mathbb{K}[x]$ 的一组基为 $B = \{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$.

(2) 举例说明: 高代教材 [1] § 4.5 习题 4 对无限维线性空间一般并不成立, 即存在无限维线性空间 V 上的自同构 $\boldsymbol{\varphi}$ 以及 $\boldsymbol{\varphi}$ 的不变子空间 W, 但 W 不是 $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ 的不变子空间.

[问题 2015A10] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, 证明下列条件等价:

(1) $V = \operatorname{Ker} \boldsymbol{\varphi} + \operatorname{Im} \boldsymbol{\varphi}$;

(2) $V = \operatorname{Ker} \boldsymbol{\varphi} \oplus \operatorname{Im} \boldsymbol{\varphi}$;

(3) $\operatorname{Ker} \boldsymbol{\varphi} \cap \operatorname{Im} \boldsymbol{\varphi} = 0$;

(4) $\operatorname{Ker} \boldsymbol{\varphi} = \operatorname{Ker} \boldsymbol{\varphi}^2$, 或等价地, $\dim \operatorname{Ker} \boldsymbol{\varphi} = \dim \operatorname{Ker} \boldsymbol{\varphi}^2$;

(5) $\operatorname{Im} \boldsymbol{\varphi} = \operatorname{Im} \boldsymbol{\varphi}^2$, 或等价地, $\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi}^2)$;

(6) $\operatorname{Ker} \boldsymbol{\varphi}$ 存在 $\boldsymbol{\varphi}$–不变的补空间, 即存在 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间 U, 使得 $V = \operatorname{Ker} \boldsymbol{\varphi} \oplus U$;

(7) $\operatorname{Im} \boldsymbol{\varphi}$ 存在 $\boldsymbol{\varphi}$–不变的补空间, 即存在 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间 W, 使得 $V = \operatorname{Im} \boldsymbol{\varphi} \oplus W$.

[问题 2015A11] 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x) \in \mathbb{K}[x]$, 证明:

$$\Big((f_1(x), f_2(x)), f_3(x), \cdots, f_m(x)\Big) = \Big(f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_m(x)\Big),$$

$$\Big[[f_1(x), f_2(x)], f_3(x), \cdots, f_m(x)\Big] = \Big[f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_m(x)\Big],$$

其中小括号表示多项式的最大公因式, 中括号表示多项式的最小公倍式.

[问题 2015A12] 设循环矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

是非异阵, 求证: $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是循环矩阵.

♣♣♣

§ 1.4 解答或提示

[问题 2015A01] 参考高代教材 § 2.6 习题 6 及其解答.

[问题 2015A02] 因为 x^k 整除 $\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式 A_{ij}, 所以 $|\boldsymbol{A}^*|$ 的每一行都能提出公因子 x^k, 故由高代白皮书例 2.38 可知, $x^{kn} \mid |\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 于是 $x^{k+1} \mid |\boldsymbol{A}|$. 本题还可以推广为: 若 k 是正整数, $p(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, 满足 $p(x)^k$ 整除 $\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式 A_{ij}, 则 $p(x)^{k+1}$ 整除 $|\boldsymbol{A}|$.

[问题 2015A03] 参考高代白皮书例 3.74.

[问题 2015A04] 只要证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}') = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 即可. 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$, 则由秩的基本不等式可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) \leq r$. 另一方面, 由秩的子式判别法可知, $\boldsymbol{A}$ 存在一个 r 阶子式非零, 不妨设 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \neq 0$, 则由 Cauchy-Binet 公式可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_r\leq n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}^2 > 0,$$

从而由秩的子式判别法可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}') \geq r$, 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}') = r = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. 本题的线性方程组求解理论的证法可参考高代白皮书例 3.76.

[问题 2015A05] 前两问可参考高代白皮书例 4.34. 下面证明后两问. 设 $s = s(\boldsymbol{AB})$, $t = s(\boldsymbol{BA})$, 则

$$\cdots > \mathrm{r}\left((\boldsymbol{AB})^{s-1}\right) > \mathrm{r}\left((\boldsymbol{AB})^{s}\right) = \mathrm{r}\left((\boldsymbol{AB})^{s+1}\right) = \cdots = \mathrm{r}_\infty(\boldsymbol{AB}),$$

$$\cdots > \mathrm{r}\left((\boldsymbol{BA})^{t-1}\right) > \mathrm{r}\left((\boldsymbol{BA})^{t}\right) = \mathrm{r}\left((\boldsymbol{BA})^{t+1}\right) = \cdots = \mathrm{r}_\infty(\boldsymbol{BA}).$$

注意到对任意的正整数 k, $(\boldsymbol{AB})^{s+k+1} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})^{s+k}\boldsymbol{B}$, $(\boldsymbol{BA})^{s+k} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{s+k-1}\boldsymbol{A}$, 故由秩的基本不等式可得

$$\mathrm{r}\left((\boldsymbol{AB})^{s+k-1}\right) \geq \mathrm{r}\left((\boldsymbol{BA})^{s+k}\right) \geq \mathrm{r}\left((\boldsymbol{AB})^{s+k+1}\right),$$

于是 $\mathrm{r}\left((\boldsymbol{BA})^{s+k}\right) = \mathrm{r}\left((\boldsymbol{AB})^{s}\right) = \mathrm{r}_\infty(\boldsymbol{AB})\,(k \geq 1)$, 因此 $t \leq s+1$ 并且 $\mathrm{r}_\infty(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{r}_\infty(\boldsymbol{BA})$. 由对称性同理可证 $s \leq t+1$, 从而 $|s-t| \leq 1$. 例如, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O}$, $s(\boldsymbol{AB}) = 1$, $s(\boldsymbol{BA}) = 0$, 满足 $|s(\boldsymbol{AB}) - s(\boldsymbol{BA})| = 1$.

[问题 2015A06] 先对特殊情形 $i_1 = j_1 = 1, \cdots, i_r = j_r = r$ 进行证明. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $|\boldsymbol{A}_{11}| = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}_{22}| = \widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$. 设 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}$ 为对应的分块, 其中 $|\boldsymbol{B}_{11}| = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r} & \cdots & A_{rr} \end{vmatrix}$. 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_n$ 可得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{A}_{22} \\ \boldsymbol{B}_{21}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{B}_{22}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{B}_{21}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{B}_{22}\boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_{n-r} \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n-r} \end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{B}_{11}|$. 又

$$\boldsymbol{CA} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{A}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix},$$

故 $|\boldsymbol{CA}| = |\boldsymbol{C}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^r|\boldsymbol{A}_{22}|$, 即 $|\boldsymbol{B}_{11}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^r|\boldsymbol{A}_{22}|$. 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则 $|\boldsymbol{B}_{11}| = |\boldsymbol{A}|^{r-1}|\boldsymbol{A}_{22}|$, 这就是要证的等式. 当 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 时, 因为要证等式的两边都是关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中元素的连续函数, 故用摄动法可过渡到非异的情形, 这样便完成了特殊情形的证明.

对一般情形, 令 $p = i_1 + i + 2 + \cdots + i_r$, $q = j_1 + j_2 + \cdots + j_r$, 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行经过 $(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \cdots + (i_r - r) = p - \dfrac{1}{2}r(r+1)$ 次相邻对换移至

第 $1,2,\cdots,r$ 行; 再将第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列经过 $(j_1-1)+(j_2-2)+\cdots+(j_r-r)=q-\dfrac{1}{2}r(r+1)$ 次相邻对换移至第 $1,2,\cdots,r$ 列, 得到的矩阵记为 $\boldsymbol{D}$. 显然 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{p+q}|\boldsymbol{D}|$, $\widehat{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}=(-1)^{p+q}\widehat{\boldsymbol{D}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$, 因此要证不等式的右边一般情形 (关于 $\boldsymbol{A}$) 与特殊情形 (关于 $\boldsymbol{D}$) 相差符号 $(-1)^{r(p+q)}$. 容易验证 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 的代数余子式之间满足关系: $A_{i_kj_l}=(-1)^{p+q}D_{kl}\,(1\le k,l\le r)$, 于是 $\boldsymbol{A}^*$ 的 r 阶子式每行都可以提出公因子 $(-1)^{p+q}$, 从而要证不等式的左边一般情形 (关于 $\boldsymbol{A}$) 与特殊情形 (关于 $\boldsymbol{D}$) 也相差符号 $(-1)^{r(p+q)}$. 因此, 一般情形的证明可以化为特殊情形的证明.

[问题 2015A07] 设 U 是由第一行元素全为零的 n 阶矩阵构成的子空间, 则 U 中所有的矩阵都是奇异阵, 并且 $\dim U=n^2-n$. 因为 V 中所有的非零矩阵都是非异阵, 故 $U\cap V=0$, 于是 $U+V=U\oplus V$ 是 $M_n(\mathbb{K})$ 的子空间. 特别地, 由 $\dim U+\dim V=\dim(U\oplus V)\le n^2$ 可得 $\dim V\le n$.

[问题 2015A08] 用反证法, 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi})\ge n-q$, 则由秩的 Sylvester 不等式可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi}^2)\ge\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi})+\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi})-n\ge n-2q$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi}^3)\ge\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi}^2)+\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi})-n\ge n-3q$, $\cdots$, 最后可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi}^m)\ge n-mq=1$, 这与 $\boldsymbol{\varphi}^m=\boldsymbol{0}$ 矛盾!

[问题 2015A09] 参考高代白皮书例 4.50 的注.

[问题 2015A10] 参考高代白皮书例 4.36.

[问题 2015A11] 最大公因式的等式即为高代教材的引理 5.3.1, 最小公倍式的等式可参考高代教材 § 5.3 习题 8 及其解答.

[问题 2015A12] https://www.cnblogs.com/torsor/p/8848641.html, 参考教学博文《循环矩阵的性质及其应用》的推论 4.

§ 1.5　15 级高等代数 II 每周一题

[问题 2016S01] 设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数首一多项式, 满足: $|a_0|$ 是素数且

$$|a_0|>1+\sum_{i=1}^{n-1}|a_i|,$$

证明: $f(x)$ 是有理数域上的不可约多项式.

注　上述不可约多项式的判别法称为 Osada 定理.

[问题 2016S02] (1) 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, V 有一个直和分解:

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m,$$

其中每个 V_i 都是 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间. 设 λ_0 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征值, $V_0=\{\boldsymbol{v}\in V\mid\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})=\lambda_0\boldsymbol{v}\}$ 为对应的特征子空间, $V_{i,0}=V_i\cap V_0=\{\boldsymbol{v}\in V_i\mid\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})=\lambda_0\boldsymbol{v}\}$. 证明:

$$V_0=V_{1,0}\oplus V_{2,0}\oplus\cdots\oplus V_{m,0}.$$

(2) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m\}$ 为分块对角阵, 其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是 n_i 阶方阵. 任取 $\boldsymbol{A}_i$ 的特征值 λ_i 和特征向量 $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{\alpha}_i\in\mathbb{C}^{n_i}$, 证明: 可在 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的上下添加适当多的零, 得到非零向量 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i\in\mathbb{C}^n$, 使得 $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i=\lambda_i\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i$, 即 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ_i 的特征向量, 称为 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的延拓.

(3) 假设同 (2), 任取 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_0, 并设 λ_0 是 $\boldsymbol{A}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{A}_{i_r}$ 的特征值, 但不是其他 $\boldsymbol{A}_j\,(1\leq j\leq m,\,j\neq i_1,\cdots,i_r)$ 的特征值, 证明: $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ_0 的特征子空间的一组基可取为 $\boldsymbol{A}_{i_k}\,(1\leq k\leq r)$ 关于特征值 λ_0 的特征子空间的一组基的延拓的并集.

[问题 2016S03] (1) n 元非零复系数多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的零点集

$$Z(f)=\Big\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{C}^n\mid f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0\Big\}$$

称为 $\mathbb{C}^n$ 中的一个超曲面. 证明: 若把线性同构 $M_n(\mathbb{C})\cong\mathbb{C}^{n^2}$ 看成是等同, 则所有不可对角化的 n 阶复矩阵包含在 $\mathbb{C}^{n^2}$ 的一个超曲面中.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶复矩阵, 证明: 存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))$, 其中 $a_{ij}(t)$ 是关于 t 的多项式, 使得 $\boldsymbol{A}(0)=\boldsymbol{A}$, 即 $a_{ij}(0)=a_{ij}$ 对任意的 i,j 都成立, 并且当 $0<t\ll 1$ 时, $\boldsymbol{A}(t)$ 都是可对角化的矩阵.

[问题 2016S04] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 其中 $|a_m|>\sum\limits_{i=0}^{m-1}|a_i|$. 证明: 矩阵方程 $2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2$ 只有零解.

[问题 2016S05] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶复矩阵, 证明: 存在正数 δ, 使得对任意的 $s\in(0,\delta)$, 下列矩阵均可对角化:

$$\boldsymbol{A}(s)=\begin{pmatrix} a_{11}+s & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+s^2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+s^n \end{pmatrix}.$$

[问题 2016S06] (1) 设 $\boldsymbol{A}(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))$ 是 n 阶 λ–矩阵, 则其行列式定义为

$$|\boldsymbol{A}(\lambda)|=\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)\in S_n}(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{i_11}(\lambda)a_{i_22}(\lambda)\cdots a_{i_nn}(\lambda).$$

利用上述定义证明: n 阶 λ–矩阵的行列式满足 9 条性质, 其中前 8 条参考高代教材 [1] § 1.3 和 § 1.4, 第 9 条性质参考高代教材的定理 1.4.1 和定理 1.4.2.

(2) 证明: λ–矩阵的行列式满足 Laplace 定理和 Cauchy-Binet 公式. 特别地, 设 $\boldsymbol{A}(\lambda),\boldsymbol{B}(\lambda)$ 为 n 阶 λ–矩阵, 则

$$|\boldsymbol{A}(\lambda)\cdot\boldsymbol{B}(\lambda)|=|\boldsymbol{A}(\lambda)|\cdot|\boldsymbol{B}(\lambda)|,$$

即 λ–矩阵乘积的行列式等于其行列式的乘积.

(3) 设 $n\,(n\geq 2)$ 阶 λ–矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}(\lambda)^*$, 它的元素即为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中元素的代数余子式, 因此 $\boldsymbol{A}(\lambda)^*$ 也是一个 n 阶 λ–矩阵. 设 $\boldsymbol{A}(\lambda),\boldsymbol{B}(\lambda)$ 为 $n\,(n\geq 2)$ 阶 λ–矩阵, 证明 λ–矩阵的伴随矩阵满足如下性质:

(3.1) $\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)^*=\boldsymbol{A}(\lambda)^*\boldsymbol{A}(\lambda)=|\boldsymbol{A}(\lambda)|\boldsymbol{I}_n$;

(3.2) $(\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda))^*=\boldsymbol{B}(\lambda)^*\boldsymbol{A}(\lambda)^*$;

(3.3) $|\boldsymbol{A}(\lambda)^*|=|\boldsymbol{A}(\lambda)|^{n-1}$;

(3.4) $(\boldsymbol{A}(\lambda)^*)^*=|\boldsymbol{A}(\lambda)|^{n-2}\boldsymbol{A}(\lambda)$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{K})$ 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|$, 试对特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 利用 (3.1) 证明 Cayley-Hamilton 定理, 即 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 为 n 阶 λ–矩阵, 证明下列结论等价:

(5.1) $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是可逆 λ–矩阵;

(5.2) $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的行列式是非零常数;

(5.3) $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的相抵标准型是 $\boldsymbol{I}_n$;

(5.4) $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 只通过 λ–矩阵的初等行变换或初等列变换就可变为 $\boldsymbol{I}_n$;

(5.5) $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是有限个初等 λ–矩阵的乘积,

上述结论之一成立时, $\boldsymbol{A}(\lambda)^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}(\lambda)|}\boldsymbol{A}(\lambda)^*$.

[问题 2016S07] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = k^2\boldsymbol{I}_3$ 且 $|\boldsymbol{A}| = k^3$, 其中 k 是非负实数. 求证: 存在实数 $t \in [-1, 3]$, 使得

$$\boldsymbol{A}^3 - tk\boldsymbol{A}^2 + tk^2\boldsymbol{A} - k^3\boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{O}.$$

[问题 2016S08] 试用线性空间理论以及多项式理论重新证明高代教材 [1] 的推论 7.3.4: 设 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ 是两个数域, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的两个矩阵, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 在 $\mathbb{F}$ 上相似当且仅当 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 在 $\mathbb{K}$ 上相似.

[问题 2016S09] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换. 设 $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in V$, 多项式 $g(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$, 若 $g(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$, 则称 $g(\lambda)$ 为 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 处的零化多项式. 若首一多项式 $m_{\boldsymbol{v}}(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 处所有非零零化多项式中的次数最小者, 则称 $m_{\boldsymbol{v}}(\lambda)$ 为 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 处的极小多项式 (当固定 $\boldsymbol{\varphi}$ 时, $m_{\boldsymbol{v}}(\lambda)$ 简称为 $\boldsymbol{v}$ 的极小多项式).

(1) 证明: 对任意的 $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in V$, 其极小多项式 $m_{\boldsymbol{v}}(\lambda)$ 存在并且唯一 (先证基本性质: 极小多项式整除任意的零化多项式).

(2) 设 $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in V$, 由 $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{v}), \cdots\}$ 张成的子空间记为 $C(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{v})$, 称为 $\boldsymbol{\varphi}$ 的由 $\boldsymbol{v}$ 生成的循环子空间 (这是包含 $\boldsymbol{v}$ 的最小的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间), $\boldsymbol{v}$ 称为循环子空间 $C(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{v})$ 的循环向量. 设 $\dim C(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{v}) = k$, 证明: $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}), \cdots, \boldsymbol{\varphi}^{k-1}(\boldsymbol{v})\}$ 是 $C(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{v})$ 的一组基. 若设

$$\boldsymbol{\varphi}^k(\boldsymbol{v}) = -a_0\boldsymbol{v} - a_1\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}) - \cdots - a_{k-1}\boldsymbol{\varphi}^{k-1}(\boldsymbol{v}),$$

令

$$m_{\boldsymbol{v}}(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

证明: $m_{\boldsymbol{v}}(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的极小多项式.

(3) 记号和假设同 (2), 证明:

(3.1) $C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})$ 中任一向量都可写成 $g(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{v})$ 的形式, 其中 $g(\lambda)\in\mathbb{K}[x]$, $\deg g(\lambda)<k$;

(3.2) $g(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{v})$ 也是 $C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})$ 的循环向量 (即 $C(\boldsymbol{\varphi},g(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{v}))=C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})$) 的充要条件是 $(g(\lambda),m_{\boldsymbol{v}}(\lambda))=1$;

(3.3) 对 $m_{\boldsymbol{v}}(\lambda)$ 的任一非常数首一因式 $h(\lambda)$, 存在 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{w}\in C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})$, 使得 $m_{\boldsymbol{w}}(\lambda)=h(\lambda)$;

(3.4) $C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})$ 只有有限个 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间, 即为

$$\Big\{C(\boldsymbol{\varphi},g(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{v}))\mid g(\lambda)\text{ 是 }m_{\boldsymbol{v}}(\lambda)\text{ 的首一因式}\Big\}.$$

(4) 设 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ 的极小多项式分别为 $m_{\boldsymbol{u}}(\lambda),m_{\boldsymbol{v}}(\lambda)$, 证明:

(4.1) 若 $(m_{\boldsymbol{u}}(\lambda),m_{\boldsymbol{v}}(\lambda))=1$, 则 $C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{u})+C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})=C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{u})\oplus C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})$, 并且 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 的极小多项式为 $m_{\boldsymbol{u}}(\lambda)\cdot m_{\boldsymbol{v}}(\lambda)$;

(4.2) 存在 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{w}\in C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{u})+C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})$, 使得 $m_{\boldsymbol{w}}(\lambda)=[m_{\boldsymbol{u}}(\lambda),m_{\boldsymbol{v}}(\lambda)]$.

(5) 设 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ 是 V 的一组基, $m_i(\lambda)$ 分别是 $\boldsymbol{v}_i$ 的极小多项式, $m(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的极小多项式, 证明:

$$m(\lambda)=[m_1(\lambda),m_2(\lambda),\cdots,m_n(\lambda)].$$

(6) 设 $m(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的极小多项式, 证明: 存在 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{v}\in V$, 使得 $\boldsymbol{v}$ 的极小多项式 $m_{\boldsymbol{v}}(\lambda)=m(\lambda)$.

(7) 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\mathbb{K}$ 中有 n 个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$, 证明: V 是循环空间, 并求其循环向量.

[问题 2016S10] (1) 证明实对称阵的特征值都是实数. 进一步, 利用 Jordan 标准型理论和反证法证明实对称阵都可实对角化.

(2) 证明实反对称阵的特征值都是 0 或纯虚数. 进一步, 利用 Jordan 标准型理论和反证法证明实反对称阵都可复对角化.

[问题 2016S11] (1) 设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$ 与所有的 $\boldsymbol{A}^k\,(k\geq 1)$ 都相似, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

(2) 设非异阵 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 相似, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

[问题 2016S12] 设 $\boldsymbol{A}$ 是非异复矩阵, 证明: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足:

(1) $\boldsymbol{B}$ 可对角化;

(2) $\boldsymbol{C}$ 的特征值全为 1 (称为幺幂阵);

(3) $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$;

(4) $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都可表示为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式,

并且满足条件 (1)—(3) 的上述分解必唯一.

注　本题是乘法形式的 Jordan-Chevalley 分解定理.

[问题 2016S13] 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 其特征多项式 $f(\lambda)=P_1(\lambda)P_2(\lambda)\cdots P_k(\lambda)$, 其中 $P_i(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式, 试求所有的 φ–不变子空间.

[问题 2016S14] 证明: 对任意的非异阵 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$, 存在 $\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{C})$, 使得 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{A}$.

[问题 2016S15] 设 $f(z)$ 是收敛半径等于 $+\infty$ 的复幂级数, 证明: 对任一 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$, 存在一个依赖于 $\boldsymbol{A}$ 的多项式 $g(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$, 使得 $f(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})$.

[问题 2016S16] (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称阵, 证明: 对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 成立 $0\leq \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')^{-1}\boldsymbol{x}<1$, 并求等于零的充要条件; 进一步, 对任意的 $\boldsymbol{B}\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, 成立 $0\leq|\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')^{-1}\boldsymbol{B}|<1$, 并求等于零的充要条件;

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶半正定实对称阵, 证明: 存在 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$ 正定且 $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')^{-1}\boldsymbol{x}=1$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$; 进一步, 存在 $\boldsymbol{B}\in M_{n\times m}(\mathbb{R})\,(n\geq m)$, 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$ 正定且 $|\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}')^{-1}\boldsymbol{B}|=1$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-m$.

[问题 2016S17] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, 其特征值为 $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$, 证明:

$$\lambda_i=\min_{V_i}\max_{\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}\in V_i}\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}=\max_{V_{n-i+1}}\min_{\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}\in V_{n-i+1}}\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

其中 V_j 表示 $\mathbb{R}^n$ 的 j 维子空间.

注　本题的结论称为 “极小极大定理” 或 “Courant-Fischer 定理”.

[问题 2016S18] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, 其特征值为 $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$.

(1) 设 $\boldsymbol{S}$ 为 $n\times m$ 阶实矩阵, 满足 $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_m$, m 阶实对称阵 $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ 的特征值为 $\mu_1\leq\mu_2\leq\cdots\leq\mu_m$, 证明:

$$\lambda_j\leq\mu_j,\quad \lambda_{n-j+1}\geq\mu_{m-j+1}\ (j=1,2,\cdots,m);$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 阶主子阵, 其特征值为 $\mu_1\leq\mu_2\leq\cdots\leq\mu_m$, 证明:

$$\lambda_j\leq\mu_j,\quad \lambda_{n-j+1}\geq\mu_{m-j+1}\ (j=1,2,\cdots,m).$$

注 本题的结论 (1) 称为 "特征值隔离定理" 或 "Poincare 定理", 结论 (2) 称为 "Cauchy 交错定理".

[问题 2016S19] 设 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值分别为 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$, $\mu_1\le\mu_2\le\cdots\le\mu_n$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\nu_1\le\nu_2\le\cdots\le\nu_n$, 证明:

$$\lambda_j+\mu_1\le\nu_j\le\lambda_j+\mu_n\ (j=1,2,\cdots,n).$$

特别地,

$$|\nu_j-\lambda_j|\le\|\boldsymbol{B}\|_2:=\max\{|\mu_1|,|\mu_n|\}.$$

注 本题的结论称为 "Weyl 摄动定理".

[问题 2016S20] (1) 设 V 是实 (复) 线性空间, 若存在 V 上的实值函数 $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$, 对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, $c\in\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, 满足:

(i) 非负性: $\|\boldsymbol{\alpha}\|\ge 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$;

(ii) 齐次性: $\|c\boldsymbol{\alpha}\|=|c|\cdot\|\boldsymbol{\alpha}\|$;

(iii) 三角不等式: $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$,

则称 $\|\cdot\|$ 是 V 上的一个范数. 给定范数的实 (复) 线性空间称为赋范线性空间. 例如在内积空间 V 中, 由内积 $(-,-)$ 诱导的范数为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})^{\frac{1}{2}}$, 因此内积空间必为赋范线性空间. 证明下列实值函数是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数, 其中 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'\in\mathbb{R}^n$:

(i) $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1:=\sum\limits_{i=1}^n|a_i|$ (称为 1–范数);

(ii) $\|\boldsymbol{\alpha}\|_2:=\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ (称为 2–范数, 即由 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积诱导的 Euclid 范数);

(iii) $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty:=\max\limits_{1\le i\le n}|a_i|$ (称为 ∞–范数).

(2) 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数, 对任意的 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{R})$, 定义 $M_n(\mathbb{R})$ 上的实值函数为 $\|\boldsymbol{A}\|:=\max\limits_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n,\,\|\boldsymbol{\alpha}\|=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\|$, 证明:

(i) 上述实值函数 $\|\cdot\|$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的范数, 称为从属于 $\mathbb{R}^n$ 上范数 $\|\cdot\|$ 的算子范数;

(ii) 上述算子范数满足: 对任意的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{R})$, 成立 $\|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|$;

(iii) $M_n(\mathbb{R})$ 上的 Frobenius 内积诱导的 Frobenius 范数 $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}=\Big(\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ 不可能是从属于 $\mathbb{R}^n$ 上某个范数的算子范数.

(3) 记从属于 $\mathbb{R}^n$ 上 1–范数 $\|\cdot\|_1$, 2–范数 $\|\cdot\|_2$ 和 ∞–范数 $\|\cdot\|_\infty$ 的 $M_n(\mathbb{R})$ 上对应的算子范数分别为 1–范数 $\|\cdot\|_1$, 2–范数 $\|\cdot\|_2$ 和 ∞–范数 $\|\cdot\|_\infty$, 对任意的 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$, 证明:

(i) $\|\boldsymbol{A}\|_1=\max\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^n|a_{ij}|$;

(ii) $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|$;

(iii) $\|\boldsymbol{A}\|_2=\big(\lambda_{max}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\big)^{\frac{1}{2}}$, 其中 $\lambda_{max}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$ 表示半正定实对称阵 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

注　每周一题 17、18、19 和 20 都有对应的复数域上的版本, 请读者自行写出其形式并证明其结论.

♣ ♣ ♣

§ 1.5 解答或提示

[问题 2016S01] 用反证法, 假设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则它可以分解为两个低次整系数首一多项式的乘积 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $g(x)=x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0\in\mathbb{Z}[x]$, $h(x)=x^t+c_{t-1}x^{t-1}+\cdots+c_0\in\mathbb{Z}[x]$, 且 $m<n$, $t<n$. 设 $f(x)$ 的 n 个复根为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 我们断言每个 $|\xi_k|>1$. 用反证法, 若存在某个 $|\xi_k|\leq 1$, 则

$$|a_0|=|\xi_k^n+\sum_{i=1}^{n-1}a_i\xi_k^i|\leq|\xi_k|^n+\sum_{i=1}^{n-1}|a_i||\xi_k|^i\leq 1+\sum_{i=1}^{n-1}|a_i|,$$

这与假设矛盾. 由 $|b_0||c_0|=|a_0|=p$ 为素数可知, 或者 $|b_0|=p$, $|c_0|=1$, 或者 $|b_0|=1$, $|c_0|=p$. 由对称性不妨设 $|b_0|=1$, $|c_0|=p$, 再设 $g(x)$ 的 m 个复根为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$, 则由 Vieta 定理可得 $|b_0|=|\xi_1\xi_2\cdots\xi_m|=|\xi_1||\xi_2|\cdots|\xi_m|>1$, 矛盾!

[问题 2016S02] 参考高代白皮书例 6.3 和例 6.4.

[问题 2016S03] (1) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$, 特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|$. 若 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化, 则 $f(\lambda)$ 必有重根, 这等价于判别式 $\Delta(f)=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}R(f,f')=0$. 因为判别式 $\Delta(f)$ 是关于未定元 a_{ij} 的多元多项式, 故所有不可对角化的复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 包含在 $\mathbb{C}^{n^2}$ 的超曲面 $\Delta(f)=0$ 中.

(2) 可对角化摄动矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 的选取方法可以根据实际情况来进行构造, 下面介绍可对角

化摄动矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 的一种常见的构造方法. 设 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶非异阵, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

取复数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 使得对任意的 $0<t\ll 1$, λ_1+c_1t, λ_2+c_2t, $\cdots$, λ_n+c_nt 都是 n 个不同的复数. 构造摄动矩阵

$$\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1+c_1t & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & \lambda_2+c_2t & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n+c_nt\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\quad 0<t\ll 1.$$

由于 $\boldsymbol{A}(t)$ 有 n 个不同的特征值, 故 $\boldsymbol{A}(t)$ 可对角化, 并且 $\lim\limits_{t\to 0+}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}(0)=\boldsymbol{A}$.

注 本题告诉我们: 可对角化的矩阵 “远远” 比不可对角化的矩阵来的多, 并且可取到一列可对角化的矩阵 “逼近” 任一不可对角化的矩阵.

[**问题 2016S04**] 参考高代白皮书第 6 章解答题 14.

[**问题 2016S05**] 参考高代白皮书例 6.34.

[**问题 2016S06**] (1) https://www.cnblogs.com/torsor/p/3554028.html, 参考教学博文《行列式的组合定义及其应用—反对称阵的 Pfaffian》.

(2) 参考高代教材中的证明, 由行列式的组合定义可推出 Laplace 定理, 由 Laplace 定理可推出 Cauchy-Binet 公式.

(3) 由行列式的性质可推出 (3.1). 参考高代白皮书例 2.36, 由 Cauchy-Binet 公式可推出 (3.2). 可利用多项式的性质证明 (3.3). 设 $g(\lambda)=|\boldsymbol{A}(\lambda)^*|-|\boldsymbol{A}(\lambda)|^{n-1}$, 由高代白皮书例 2.38 可知, 对任意的 $k\in\mathbb{K}$, $g(k)=|\boldsymbol{A}(k)^*|-|\boldsymbol{A}(k)|^{n-1}=0$, 于是 $g(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}$ 中有无穷多个根, 从而 $g(\lambda)$ 为零多项式, 这就证明了结论. 同理, 可利用多项式的性质证明 (3.4), 以及给出 (2), (3.1) 和 (3.2) 的另一证明.

(4) 设特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$, $(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^*=\boldsymbol{M}_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\boldsymbol{M}_1\lambda+\boldsymbol{M}_0$, 则由 $(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^*=f(\lambda)\boldsymbol{I}_n$ 展开后比较矩阵多项式的系数, 依

次可得: $\boldsymbol{M}_{n-1}=\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{M}_{n-2}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_{n-1}+a_1\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}+a_1\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{M}_{n-3}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_{n-2}+a_2\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}^2+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{I}_n$, $\cdots$, $\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_1+a_{n-1}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}^{n-1}+a_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{I}_n$, 最后可得

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_0+a_n\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{I}_n=f(\boldsymbol{A}).$$

(5) 参考高代正课教学视频 § 7.2 中的证明.

[问题 2016S07] 若 $k=0$, 则可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 结论显然成立. 若 $k>0$, 则 $\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}$ 是行列式值等于 1 的正交矩阵, 因此考虑 $k=1$ 的情形即可. 注意到正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 ±1 或模长为 1 的共轭虚数, 又 $|\boldsymbol{A}|=1$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中至少有一个 1, 另外两个特征值可设为 $\cos\theta\pm \mathrm{i}\sin\theta$. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3$, 则由 Vieta 定理可得 $a_1=-(1+2\cos\theta)$, $a_2=1+2\cos\theta$, $a_3=-1$. 令 $t=1+2\cos\theta$, 则 $t\in[-1,3]$, 由 Cayley-Hamilton 定理可得 $\boldsymbol{A}^3-t\boldsymbol{A}^2+t\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_3=\boldsymbol{O}$.

[问题 2016S08] 参考教学论文 [18] 的例 1.

[问题 2016S09] 参考教学论文 [20] 的引理 1, 命题 1, 命题 2, 命题 3 和例 1.

[问题 2016S10] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/6785447.html.

[问题 2016S11] 参考教学论文 [8] 的命题 1 和命题 2.

[问题 2016S12] 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{N}$ 是加法形式的 Jordan-Chevalley 分解, 其中 $\boldsymbol{B}$ 可对角化, $\boldsymbol{N}$ 幂零, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{B}$, 且 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}$ 都可表示为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式. 参考高代教材定理 7.7.3 的证明, 由 $\boldsymbol{A}$ 非异可知 $\boldsymbol{B}$ 也非异, 令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$. 由 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}$ 乘法可交换以及 $\boldsymbol{N}$ 幂零可得 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 也幂零, 从而 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值全为 0, 于是 $\boldsymbol{C}$ 的特征值全为 1. 由 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}$ 乘法可交换可知 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 乘法也可交换. 由高代白皮书例 6.86 可知, $\boldsymbol{B}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的多项式, 从而也是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式, 于是 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式. 反之, 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 是乘法形式的 Jordan-Chevalley 分解, 令 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I}_n)$, 则类似于上面的讨论同理可证 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{N}$ 是加法形式的 Jordan-Chevalley 分解. 这就建立了加法形式分解与乘法形式分解之间的一一对应, 从而由加法形式分解的唯一性即得乘法形式分解的唯一性. 也可以仿照高代教材定理 7.7.3 的证明, 直接构造乘法形式的 Jordan-Chevalley 分解.

[问题 2016S13] 参考教学论文 [20] 的例 3.

[问题 2016S14] 参考高代白皮书第 7 章解答题 13.

[问题 2016S15] 设 $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{C})$ 的全体不同特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 属于特征值 λ_i 的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_i)^{r_{i1}}, \cdots, (\lambda-\lambda_i)^{r_{in_i}}$, 其中 $r_{i1} \le \cdots \le r_{in_i}$, $1 \le i \le s$, 则存在非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J} = \operatorname{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_{11}}(\lambda_1), \cdots, \boldsymbol{J}_{r_{1n_1}}(\lambda_1); \cdots; \boldsymbol{J}_{r_{s1}}(\lambda_s), \cdots, \boldsymbol{J}_{r_{sn_s}}(\lambda_s)\}$$

为 Jordan 标准型. 根据高代教材 § 7.8 可知, 对收敛半径等于 $+\infty$ 的复幂级数 $f(z)$, 有

$$f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}\operatorname{diag}\{f(\boldsymbol{J}_{r_{11}}(\lambda_1)), \cdots, f(\boldsymbol{J}_{r_{1n_1}}(\lambda_1)); \cdots; f(\boldsymbol{J}_{r_{s1}}(\lambda_s)), \cdots, f(\boldsymbol{J}_{r_{sn_s}}(\lambda_s))\}\boldsymbol{P}^{-1},$$

其中

$$f(\boldsymbol{J}_{r_{ij}}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r_{ij}-1)!}f^{(r_{ij}-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r_{ij}-2)!}f^{(r_{ij}-2)}(\lambda_i) \\ & & f(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r_{ij}-3)!}f^{(r_{ij}-3)}(\lambda_i) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}. \quad (1.5.1)$$

由 (1.5.1) 式可知, $f(\boldsymbol{A})$ 的值由过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和下列数组

$$\{f^{(k)}(\lambda_i) \mid 1 \le i \le s,\ 0 \le k \le r_{in_i}-1\}$$

唯一确定. 因为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是互异的复数, 故由 Hermite-Lagrange 插值公式可知, 存在多项式 $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, 使得

$$g^{(k)}(\lambda_i) = f^{(k)}(\lambda_i), \quad 1 \le i \le s,\ 0 \le k \le r_{in_i}-1.$$

于是由 (1.5.1) 式可知, $g(\boldsymbol{J}_{r_{ij}}(\lambda_i)) = f(\boldsymbol{J}_{r_{ij}}(\lambda_i))$ 对任意的 $1 \le i \le s$, $1 \le j \le n_i$ 成立, 从而 $g(\boldsymbol{J}) = f(\boldsymbol{J})$, 因此

$$f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}f(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}g(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}^{-1} = g(\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}) = g(\boldsymbol{A}).$$

注 矩阵函数也可用多项式来定义. 本题告诉我们, 这种定义与幂级数的定义是等价的.

[问题 2016S16] 参考高代白皮书第 8 章解答题 7 和第 9 章解答题 15.

[问题 2016S17] 设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的标准正交的特征向量. 记 $U_j = L(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_j) \subseteq \mathbb{R}^n$. 显然, $\mathbb{R}^n$ 的任一 i 维子空间 V_i 与 $U_{i-1}^{\perp} = L(\boldsymbol{e}_i, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 的交空间非零. 任取非零向量 $\boldsymbol{x} \in V_i \cap U_{i-1}^{\perp}$, 可设 $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{j=i}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j$, 则 $x_i, \cdots, x_n$ 不全为零且 $\dfrac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \dfrac{\sum\limits_{j=i}^{n} \lambda_j x_j^2}{\sum\limits_{j=i}^{n} x_j^2} \geq \lambda_i$. 由于上式对 $\mathbb{R}^n$ 的任一 i 维子空间 V_i 均成立, 故

$$\min_{V_i} \max_{\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in V_i} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} \geq \lambda_i. \tag{1.5.2}$$

另一方面, 取 $V_i = U_i$, 则对任一非零向量 $\boldsymbol{x} \in U_i$, 可设 $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{j=1}^{i} x_j \boldsymbol{e}_j$, 则 $x_1, \cdots, x_i$ 不全为零且 $\dfrac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{i} \lambda_j x_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^2} \leq \lambda_i$, 并且当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ 时可取到等号. 因此

$$\min_{V_i} \max_{\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in V_i} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} \leq \max_{\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in U_i} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \lambda_i. \tag{1.5.3}$$

综合 (1.5.2) 式和 (1.5.3) 式即得结论中的第一个等式. 第二个等式的证明是类似的. 特别地, 由 (1.5.3) 式及类似的证明可知, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的 i 维子空间 U_i 以及 $n-i+1$ 维子空间 $U_{i-1}^{\perp}$, 使得

$$\lambda_i = \max_{\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in U_i} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \min_{\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in U_{i-1}^{\perp}} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} \ (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.5.4}$$

注　本题是高代白皮书例 9.52 的推广.

[问题 2016S18] (1) 由 $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}_m$ 可知 $\boldsymbol{S}$ 为列满秩阵, 故 $\boldsymbol{S} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是单线性映射, 从而对 $\mathbb{R}^m$ 的任一 j 维子空间 W_j, $\boldsymbol{S}(W_j)$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的 j 维子空间. 对 $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ 应用 [问题 2016S17] 的结论可得:

$$\begin{aligned}\mu_j &= \min_{W_j} \max_{\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in W_j} \frac{\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{S}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \min_{W_j} \max_{\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in W_j} \frac{(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})'(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})} \\ &= \min_{\boldsymbol{S}(W_j)} \max_{\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}(W_j)} \frac{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}} \geq \min_{V_j} \max_{\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{y} \in V_j} \frac{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}} = \lambda_j,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{m-j+1} &= \max_{W_j} \min_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in W_j} \frac{\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{S}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \max_{W_j} \min_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in W_j} \frac{(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})'(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})} \\ &= \max_{\boldsymbol{S}(W_j)} \min_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{y}\in \boldsymbol{S}(W_j)} \frac{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}} \leq \max_{V_j} \min_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{y}\in V_j} \frac{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}} = \lambda_{n-j+1}.\end{aligned}$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}_m$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,\cdots,i_m$ 行和列构成的 m 阶主子阵, 取 $\boldsymbol{S}$ 为单位阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的第 $i_1,\cdots,i_m$ 列构成的 $n\times m$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}_m$, 于是 (2) 是 (1) 的推论.

[问题 2016S19] 由 (1.5.4) 式可知, $\lambda_j = \max\limits_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in U_j} \dfrac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}$, 其中 U_j 是 $\mathbb{R}^n$ 的某个 j 维子空间. 由 [问题 2016S17] 的结论可得:

$$\begin{aligned}\nu_j &= \min_{V_j} \max_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in V_j} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} \leq \max_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in U_j} \frac{\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} \\ &\leq \max_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in U_j} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} + \max_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in U_j} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} \leq \lambda_j + \max_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^n} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \lambda_j + \mu_n.\end{aligned}$$

由 (1.5.4) 式可知, $\lambda_j = \min\limits_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in U_{j-1}^{\perp}} \dfrac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}$, 其中 $U_{j-1}^{\perp}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的某个 $n-j+1$ 维子空间. 由 [问题 2016S17] 的结论可得:

$$\begin{aligned}\nu_j &= \max_{V_{n-j+1}} \min_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in V_{n-j+1}} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} \geq \min_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in U_{j-1}^{\perp}} \frac{\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} \\ &\geq \min_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in U_{j-1}^{\perp}} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} + \min_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in U_{j-1}^{\perp}} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} \geq \lambda_j + \min_{\mathbf{0}\neq \boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^n} \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \lambda_j + \mu_1.\end{aligned}$$

由上述两个不等式即得 $|\nu_j-\lambda_j|\leq \|\boldsymbol{B}\|_2 := \max\{|\mu_1|,|\mu_n|\}$.

注 本题是高代白皮书例 9.53 的推广.

[问题 2016S20] 参考 [6] 第一章 § 1.

§ 1.6　16 级高等代数 I 每周一题

[问题 2016A01] 试求下列 $n+1$ 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} x-n & n & & & \\ -1 & x-n+2 & n-1 & & \\ & -2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -n & x+n \end{vmatrix}.$$

[问题 2016A02] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^m\,(m\geq 1)$, 请用高代 I 的方法证明: $\boldsymbol{A}$ 为奇异阵.

[问题 2016A03] 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 n 个不同的数.

(i) 试求下列 Vandermonde 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix};$$

(ii) 设 $f(x)$ 为次数小于 n 的多项式, 满足 $f(\lambda_i)=b_i\,(1\leq i\leq n)$, 请利用 (i) 的结论证明: $f(x)$ 必为如下形式的多项式 (称为 Lagrange 插值公式):

$$f(x)=\sum_{i=1}^n b_i\frac{(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_{i-1})(x-\lambda_{i+1})\cdots(x-\lambda_n)}{(\lambda_i-\lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_n)}.$$

[问题 2016A04] 设下列矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是可逆阵, 试求其逆阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

[问题 2016A05] 每一行、每一列只有一个元素为 1, 其余元素为 0 的方阵称为置换矩阵, n 阶置换矩阵全体记为 $\mathcal{P}_n$. 证明: 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathcal{P}_n$, 则 $\boldsymbol{AB}\in\mathcal{P}_n$; $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}'\in\mathcal{P}_n$.

[问题 2016A06] 下列矩阵称为 Toeplitz 矩阵或位移矩阵 (一列数 $a_{-(n-1)},\cdots,a_{-2},a_{-1}$, $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 依次向右平移一位):

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{-(n-2)} & a_{-(n-3)} & a_{-(n-4)} & \cdots & a_1 \\ a_{-(n-1)} & a_{-(n-2)} & a_{-(n-3)} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

(i) 设 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}'$, 证明:

$$\boldsymbol{A}=a_{-(n-1)}\boldsymbol{M}^{n-1}+\cdots+a_{-2}\boldsymbol{M}^2+a_{-1}\boldsymbol{M}+a_0\boldsymbol{I}_n+a_1\boldsymbol{N}+a_2\boldsymbol{N}^2+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{N}^{n-1};$$

(ii) n 阶上三角 (下三角) Toeplitz 矩阵全体记为 T_U (T_L), 证明: 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in T_U$ (T_L), 则 $\boldsymbol{AB}\in T_U$ (T_L); 若 $\boldsymbol{A}\in T_U$ (T_L) 为非异阵, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}\in T_U$ (T_L);

(iii) 举例说明: 存在 n 阶 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}$ 不是 Toeplitz 矩阵; 存在 n 阶非异 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 使得 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 不是 Toeplitz 矩阵.

[问题 2016A07] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实方阵, 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}$, 设 $d=|\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}|$. 证明: 若 n 是奇数, 则 $d=0$; 若 n 能被 4 整除, 则 $d\geq 0$; 若 n 除以 4 余 2, 则 $d\leq 0$.

[问题 2016A08] 设 $\boldsymbol{J}$ 为元素全为 1 的 n 阶方阵, $\boldsymbol{X}$ 为 n 阶未知矩阵, 满足 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{JX}+\boldsymbol{XJ}$, 请用高代 I 的方法证明: $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$.

[问题 2016A09] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 满足: $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2=2\boldsymbol{B}$, $2I_n-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 为非异阵, 证明: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

[问题 2016A10] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 证明: 若 n 是奇数, 则 $\boldsymbol{AB}'+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}$ 必为奇异阵; 若 n 为偶数, 举例说明上述结论一般不成立.

[问题 2016A11] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 和 $m\times p$ 矩阵, $\boldsymbol{X}$ 为 $n\times p$ 未知矩阵, 证明: 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

[问题 2016A12] 设 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_k,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_k$ 是 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{Q}_j=\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{P}_i$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_i)=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{Q}_i)\,(1\le i,j\le k)$. 证明: $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_k)$.

[问题 2016A13] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 和 $n\times p$ 矩阵, 证明: 存在 $p\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$.

[问题 2016A14] 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明: 若 V 的任一 $n-1$ 维子空间都是 φ–不变子空间, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 必为纯量变换.

[问题 2016A15] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换.

(i) 设 $\boldsymbol{v}\in V$, $g(x)\in\mathbb{K}[x]$, 使得 $g(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$, 则称 $g(x)$ 为 $\boldsymbol{v}$ 的零化多项式. 证明: 在 $\boldsymbol{v}$ 的全体非零零化多项式构成的集合中, 存在唯一的次数最小的首一零化多项式, 称为 $\boldsymbol{v}$ 的极小多项式, 记为 $m_{\boldsymbol{v}}(x)$;

(ii) 设 $\boldsymbol{v}\in V$, 称由 $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{v}),\cdots\}$ 张成的子空间 $C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})$ 为 $\boldsymbol{v}$ 关于 $\boldsymbol{\varphi}$ 的循环子空间. 设 $\boldsymbol{v}$ 的极小多项式为 $m_{\boldsymbol{v}}(x)=x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 证明: $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}),\cdots,\boldsymbol{\varphi}^{k-1}(\boldsymbol{v})\}$ 构成了 $C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})$ 的一组基, 特别地, $\dim C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})=\deg m_{\boldsymbol{v}}(x)$;

(iii) 设 $\boldsymbol{v}$ 的极小多项式 $m_{\boldsymbol{v}}(x)=m_1(x)m_2(x)\cdots m_r(x)$, 其中 $m_i(x)$ 是两两互素的首一多项式. 证明: 存在 $\boldsymbol{v}_i\in C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})$, 使得 $\boldsymbol{v}_i$ 的极小多项式为 $m_i(x)$, 并且

$$C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})=C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v}_1)\oplus C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v}_2)\oplus\cdots\oplus C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v}_r);$$

(iv) 设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_r\in V$ 的极小多项式分别为 $m_1(x),m_2(x),\cdots,m_r(x)$, 它们是两两互素的多项式. 证明: 存在 $\boldsymbol{v}\in V$, 使得 $\boldsymbol{v}$ 的极小多项式 $m_{\boldsymbol{v}}(x)=m_1(x)m_2(x)\cdots m_r(x)$, 并且

$$C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v})=C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v}_1)\oplus C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v}_2)\oplus\cdots\oplus C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{v}_r).$$

[问题 2016A16] 设 $\boldsymbol{A}$ 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{A}^p=\boldsymbol{I}_n$, 其中 p 为素数. 证明: 对任意的复数 λ_0 以及任意的整数 $0<k<p$, 若 $\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 为奇异阵, 则 $\lambda_0^k\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 也为奇异阵.

♣ ♣ ♣

§ 1.6 解答或提示

[问题 2016A01] 设 $n+1$ 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 为 D_n, 我们来求递推关系式. 第一步将第 i 行乘以 -1 加到第 $i-1$ 行上 $(i=2,\cdots,n)$; 第二步将第 $i-1$ 列加到第 i 列上 $(i=2,\cdots,n)$; 第三步是所得行列式按第 n 列进行展开:

$$D_n=\begin{vmatrix} x-n & n & & & & & \\ -1 & x-n+2 & n-1 & & & & \\ & -2 & x-n+4 & n-2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -(n-1) & x+n-2 & 1 \\ & & & & & -n & x+n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-n+1 & -x+2n-2 & -n+1 & & & & \\ -1 & x-n+4 & -x+2n-5 & -n+2 & & & \\ & -2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -(n-1) & x+2n-2 & -x-n+1 \\ & & & & & -n & x+n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-n+1 & n-1 & & & & \\ -1 & x-n+3 & n-2 & & & \\ & -2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & -(n-1) & x+n-1 \\ & & & & & -n & x \end{vmatrix}=xD_{n-1}.$$

又 $D_1=\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix}=x^2$, 不断递推下去即得 $|\boldsymbol{A}|=D_n=x^{n+1}$. 若设

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1\end{pmatrix},\ \text{则}\ \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1\end{pmatrix},$$

于是上述一系列的初等变换等价于相似变换 $\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{PAP}^{-1}$.

[问题 2016A02] 用反证法, 若 $\boldsymbol{A}$ 为非异阵, 则等式 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^m$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-m}$ 可得 $\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}^{-m+1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$. 上式两边同时取迹, 由矩阵迹的交换性可得 $n=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_n)=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{B})\right)-\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}\right)=0$, 矛盾!

[问题 2016A03] 将 Vandermonde 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 i 行展开可得

$$|\boldsymbol{A}|=A_{i1}+A_{i2}\lambda_i+\cdots+A_{in}\lambda_i^{n-1}=\prod_{1\leq i<k\leq n}(\lambda_k-\lambda_i).$$

注意到代数余子式 A_{ij} 与 λ_i 无关, 故上式两边都可看成是关于 λ_i 的多项式. 比较等式两边 λ_i^{j-1} 的系数, 可得 (也可直接由高代白皮书例 1.32 得到):

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\sum_{(k_1<\cdots<k_{n-j})\in[1,n]\setminus\{i\}}\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_{n-j}}\prod_{(l<k)\in[1,n]\setminus\{i\}}(\lambda_k-\lambda_l).$$

设 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=(b_{ij})$, 则

$$b_{ij}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}A_{ji}=(-1)^{n+i}\sum_{(k_1<\cdots<k_{n-i})\in[1,n]\setminus\{j\}}\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_{n-i}}\Big/\prod_{k\neq j}(\lambda_j-\lambda_k).$$

(2) 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$, $\boldsymbol{\alpha}=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})'$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$, 则由 $f(\lambda_i)=b_i\,(1\leq i\leq n)$ 可得 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\beta}$. 于是 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$, 再由 (1) 可得

$$a_{i-1}=\sum_{j=1}^n b_{ij}b_j=(-1)^{n+i}\sum_{j=1}^n b_j\sum_{(k_1<\cdots<k_{n-i})\in[1,n]\setminus\{j\}}\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_{n-i}}\Big/\prod_{k\neq j}(\lambda_j-\lambda_k).$$

最后可得

$$f(x)=\sum_{i=1}^n a_{i-1}x^{i-1}=\sum_{i=1}^n(-1)^{n+i}x^{i-1}\sum_{j=1}^n b_j\sum_{(k_1<\cdots<k_{n-i})\in[1,n]\setminus\{j\}}\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_{n-i}}\Big/\prod_{k\neq j}(\lambda_j-\lambda_k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} x^{i-1} \sum_{(k_1<\cdots<k_{n-i})\in[1,n]\setminus\{j\}} \lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_{n-i}} \Big/ \prod_{k\neq j}(\lambda_j-\lambda_k) \\
&= \sum_{j=1}^n b_j \prod_{k\neq j}(x-\lambda_k) \Big/ \prod_{k\neq j}(\lambda_j-\lambda_k).
\end{aligned}
$$

[问题 2016A04] 令 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD}$. 由行列式的降阶公式可知 (参考高代白皮书例 2.67):

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{C}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{B}| &= (-1)^n \left| \boldsymbol{I}_2 - \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^n a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^n a_i \\ \sum\limits_{i=1}^n a_i & n \end{pmatrix} \right| \\
&= (-1)^n \left((1-n)(1-\sum_{i=1}^n a_i^2) - (\sum_{i=1}^n a_i)^2 \right) \neq 0.
\end{aligned}
$$

记 $c=(1-n)(1-\sum\limits_{i=1}^n a_i^2)-(\sum\limits_{i=1}^n a_i)^2 \neq 0$, 再由高代白皮书例 2.25 (Sherman-Morrison-Woodbury 公式) 可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^{-1} &= \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{DA}^{-1} \\
&= -\boldsymbol{I}_n - \frac{1}{c}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-n & -\sum\limits_{i=1}^n a_i \\ -\sum\limits_{i=1}^n a_i & 1-\sum\limits_{i=1}^n a_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\boldsymbol{I}_n - \frac{1}{c}\left(a_i a_j (1-n) - (a_i+a_j)\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i^2 + 1 \right)_{n\times n}.
\end{aligned}
$$

[问题 2016A05] 设 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 是对换单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的第 i 列与第 j 列后得到的第一类初等阵, 显然 $\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{P}'_{ij}=\boldsymbol{P}_{ij}^{-1}$. 设 $\boldsymbol{I}_n=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 为列分块, 其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 n 维标准单位列向量. 我们断言: $\boldsymbol{P}$ 是置换矩阵当且仅当 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_r$ 是若干个第一类初等阵的乘积. 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_r$ 是若干个第一类初等阵的乘积, 则 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_r$, 这相当于对 $\boldsymbol{I}_n$ 的列向量做了若干次列对换, 得到 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_n})$, 其中 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个全排列, 这样的 $\boldsymbol{P}$ 当然是置换矩阵. 反之, 若

$\boldsymbol{P}$ 是置换矩阵, 则 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_n})$ 为列分块, 其中 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个全排列, 于是可通过若干次对换将 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 变为 $(1,2,\cdots,n)$, 这对应于 $\boldsymbol{P}$ 作若干次列对换后可变为单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$, 即存在第一类初等阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_r$, 使得 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}_r\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{I}_n$, 于是

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_r\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_r^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_r.$$

有了上述判定准则, 马上可以推出置换矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的乘积仍然是若干个第一类初等阵的乘积, 从而还是置换矩阵. 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_r$ 是置换矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{P}_r\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$ 仍为置换矩阵.

[问题 2016A06] (i) 由高代白皮书例 2.2 及其转置版本即得分解式. (ii) 只证 T_U 的情形, T_L 的情形由转置即得. 设 $\boldsymbol{A}=a_0\boldsymbol{I}_n+a_1\boldsymbol{N}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{N}^{n-1}$, $\boldsymbol{B}=b_0\boldsymbol{I}_n+b_1\boldsymbol{N}+\cdots+b_{n-1}\boldsymbol{N}^{n-1}$, 则由 $\boldsymbol{N}^n=\boldsymbol{O}$ 可将 $\boldsymbol{AB}$ 整理为 $\boldsymbol{N}$ 的小于 n 次的多项式, 于是 $\boldsymbol{AB}\in T_U$. 若 $\boldsymbol{A}=a_0\boldsymbol{I}_n+a_1\boldsymbol{N}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{N}^{n-1}$ 为非异阵, 则 $a_0\neq 0$. 令 $\boldsymbol{A}^{-1}=a_0^{-1}\boldsymbol{I}_n+x_1\boldsymbol{N}+\cdots+x_{n-1}\boldsymbol{N}^{n-1}$, 则由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}_n$ 可以依次唯一地确定 $x_1,\cdots,x_{n-1}$, 这也说明 $\boldsymbol{A}^{-1}\in T_U$. (iii) 例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\in T_U$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\in T_L$, 但 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 不是 Toeplitz 矩阵. 例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&2\\0&3&1\end{pmatrix}$ 是非异 Toeplitz 矩阵, 容易验证 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的主对角元不全部相同, 从而不是 Toeplitz 矩阵.

[问题 2016A07] 由高代白皮书例 2.71 的结论可得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&-\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{vmatrix}&=|\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{B})|\\&=|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2-\mathrm{i}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})|=|-\mathrm{i}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})|=(-\mathrm{i})^n|\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}|.\end{aligned}$$

注意到 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为实方阵, 故 $d=|\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}|$ 为实数, $\overline{|\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}|}=|\overline{\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}}|=|\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{B}|$, 于是 $(-\mathrm{i})^nd=|\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}|\overline{|\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}|}\geq 0$. 因此, 若 n 是奇数, 则 $(-\mathrm{i})^n=\pm\mathrm{i}$, 从而 $d=0$; 若 n 能被 4 整除, 则 $(-\mathrm{i})^n=1$, 从而 $d\geq 0$; 若 n 除以 4 余 2, 则 $(-\mathrm{i})^n=-1$, 从而 $d\leq 0$.

[问题 2016A08] 若 $n=1$, 则结论显然成立. 下设 $n\geq 2$. 注意到 $\boldsymbol{J}^2=n\boldsymbol{J}$, 故在矩阵方程 $\boldsymbol{JX}+\boldsymbol{XJ}=\boldsymbol{X}$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{J}$ 后有 $n\boldsymbol{JX}+\boldsymbol{JXJ}=\boldsymbol{JX}$, 于是 $\boldsymbol{JXJ}=(1-n)\boldsymbol{JX}$.

在此矩阵方程两边同时右乘 $\boldsymbol{J}$ 后有 $n\boldsymbol{JXJ}=(1-n)\boldsymbol{JXJ}$, 即 $(2n-1)\boldsymbol{JXJ}=\boldsymbol{O}$, 于是 $\boldsymbol{O}=\boldsymbol{JXJ}=(1-n)\boldsymbol{JX}$, 从而 $\boldsymbol{JX}=\boldsymbol{O}$. 类似地可以证明 $\boldsymbol{XJ}=\boldsymbol{O}$, 于是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{JX}+\boldsymbol{XJ}=\boldsymbol{O}$.

[问题 2016A09] 注意到 $\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2=(2\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}$, 又 $2\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是非异阵, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\big(\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\big)=\mathrm{r}\big((2\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}\big)=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

[问题 2016A10] 参考高代白皮书例 3.67.

[问题 2016A11] 参考高代白皮书例 3.105.

[问题 2016A12] 由高代白皮书例 3.79 可知, 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 则对任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{C}$, 有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{ABC})=\mathrm{r}(\boldsymbol{BC})$. 其转置版本是: 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 则对任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{C}$, 有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{CAB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{CA})$. 由 $\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_j$ 乘法可交换得到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1)=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Q}_1)=\mathrm{r}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_1)$, 故可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Q}_2)=\mathrm{r}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Q}_2)=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2)$. 再由条件 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_2)=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Q}_2)$ 可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Q}_2)$, 因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2)$. 假设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_i)=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_i)$ 已证明, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_i)=\mathrm{r}(\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_i)$, 故可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1}\boldsymbol{Q}_{i+1})=\mathrm{r}(\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1}\boldsymbol{Q}_{i+1})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{Q}_{i+1})$. 再由条件 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_{i+1})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_{i+1}\boldsymbol{Q}_{i+1})$ 可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1}\boldsymbol{Q}_{i+1})$, 因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_1\cdots\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{Q}_{i+1})$. 对 i 用归纳法即得结论.

[问题 2016A13] 参考高代白皮书例 3.107.

[问题 2016A14] 参考高代白皮书例 4.47.

[问题 2016A15] 参考教学论文 [20].

[问题 2016A16] 若 $\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 为奇异阵, 则 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由于 $\boldsymbol{A}$ 适合多项式 x^p-1, 故 λ_0 也适合多项式 x^p-1, 即有 $\lambda_0^p=1$. 若 $\lambda_0=1$, 则结论显然成立. 下设 $\lambda_0\neq1$, 则 λ_0 是多项式 $g(x)=x^{p-1}+\cdots+x+1$ 的根, 由高代教材例 5.7.3 可知 $g(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式, 再由高代白皮书例 5.18 可知 $g(x)$ 是 λ_0 的极小多项式. 设 $f(x)=|x\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 则 λ_0 也是 $f(x)$ 的根, 由极小多项式的基本性质可知 $g(x)\mid f(x)$. 对任意的整数 $0<k<p$, 显然 $\lambda_0^k\neq1$ 且 $(\lambda_0^k)^p=1$, 于是 λ_0^k 也是 $g(x)$ 的根, 从而也是 $f(x)$ 的根, 即 λ_0^k 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 这等价于 $\lambda_0^k\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 也为奇异阵.

§ 1.7　16 级高等代数 II 每周一题

[问题 2017S01] 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对合阵, 即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}_n$, 证明: $n-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 为偶数, 并且 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=n$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$.

[问题 2017S02] 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&a&0\\a-2&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化, 求 a 的值.

[问题 2017S03] 设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m\in M_n(\mathbb{K})$, $g(x)\in\mathbb{K}[x]$, 使得 $g(\boldsymbol{A}_1),g(\boldsymbol{A}_2),\cdots,g(\boldsymbol{A}_m)$ 都是非异阵. 试用两种方法证明: 存在 $h(x)\in\mathbb{K}[x]$, 使得 $g(\boldsymbol{A}_i)^{-1}=h(\boldsymbol{A}_i)$ 对所有的 $1\leq i\leq m$ 都成立.

[问题 2017S04] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶复矩阵, 证明: 存在正数 δ, 使得对任意的 $s\in(0,\delta)$, 下列矩阵均可对角化:

$$\boldsymbol{A}(s)=\begin{pmatrix}a_{11}+s&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}+s^2&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}+s^n\end{pmatrix}.$$

[问题 2017S05] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 证明: 若下列条件之一成立, 则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{X}$ 只有零解:

(1) $\boldsymbol{A}$ 为幂零阵, 即存在正整数 m, 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都为 1;

(3) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为偶数;

(4) $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值实部的绝对值都小于 $\dfrac{1}{2}$.

[问题 2017S06] 请用高代教材 [1] 第六章和第七章中的方法证明: 实对称阵有完全的特征向量系, 从而可对角化.

[问题 2017S07] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}$ 都是 n 阶实对称阵, 证明: 若 s 是 $\boldsymbol{AB}$ 的一个特征值, 则存在 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_0 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 μ_0, 使得 $s=\lambda_0\mu_0$.

[问题 2017S08] 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ 1 & a_2 & 1 & & & \\ & 1 & a_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & 1 & a_n \end{pmatrix}$.

(i) 求证: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值;

(ii) 试求实线性空间 $C(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{R})\mid \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\}$ 的维数.

[问题 2017S09] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, $f(\lambda),m(\lambda)$ 分别是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征多项式和极小多项式. 以下各小问的假设是独立的.

(i) 设 $f(\lambda)=m(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^n$, 试求 V 的所有 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间.

(ii) 设 $f(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)\cdots f_k(\lambda)$, 其中 $f_i(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上两两互素的多项式. 设 $V_i=\operatorname{Ker} f_i(\boldsymbol{\varphi})$, 则 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$. 任取 V 的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间 U, 证明: $U=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_k$, 其中 U_i 是 V_i 的 $\boldsymbol{\varphi}$-不变子空间.

(iii) 设 $f(\lambda)=m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 $\mathbb{K}$ 中互异的 k 个数, $r_i\geq 1\,(1\leq i\leq k)$, 试求 V 的所有 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间.

(iv) 设存在 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示阵为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}(g(\lambda))$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}(h(\lambda))$ 是对应于 $\mathbb{K}$ 上两个首一不可约多项式 $g(\lambda),h(\lambda)$ 的 Frobenius 块 (也就是友阵的转置), $\boldsymbol{C}$ 是左下角那个元素为 1, 其余元素为 0 的矩阵. 试求 V 的所有 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间.

(v) 设 $f(\lambda)=m(\lambda)=P_1(\lambda)^{r_1}P_2(\lambda)^{r_2}\cdots P_k(\lambda)^{r_k}$, 其中 $P_1(\lambda),P_2(\lambda),\cdots,P_k(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式, $r_i\geq 1\,(1\leq i\leq k)$, 试求 V 的所有 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间.

[问题 2017S10] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换. 证明: $\boldsymbol{\varphi}$ 的极小多项式在 $\mathbb{K}$ 上无重因式的充分必要条件是对 V 的任一 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间 U, 均存在 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间 W, 使得 $V=U\oplus W$.

[问题 2017S11] 设 $f(z)$ 是收敛半径为 $+\infty$ 的复幂级数, $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$, $g(\lambda)=|f(\lambda)\boldsymbol{I}_n-f(\boldsymbol{A})|$, 证明: $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

[问题 2017S12] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称阵, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实方阵, 使得 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$ 为半正定阵, 证明: $\boldsymbol{B}$ 的特征值都落在复平面上的单位圆内 (包含边界).

[问题 2017S13] 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶半正定实对称阵, 满足 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = 0$. 请利用半正定阵的基本性质证明: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$.

[问题 2017S14] 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个互异的正实数, 试用两种方法证明: n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是正定阵, 其中 $a_{ij} = \dfrac{1}{a_i + a_j}$.

[问题 2017S15] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称阵, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为对应的实二次型. 设去掉 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 i 列后的主子阵为 $\boldsymbol{A}_i$, 证明: $f(\boldsymbol{x})$ 在 $x_i = 1$ 的条件下的最小值为 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{A}_i|}$, $1 \leq i \leq n$.

[问题 2017S16] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 为正定阵 (半正定阵) 的充分必要条件是

$$c_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} > 0 \ (\geq 0), \quad r = 1, 2, \cdots, n.$$

[问题 2017S17] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称阵, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是 n 维实列向量, 证明: $(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})^2 \leq (\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta})$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 成比例.

[问题 2017S18] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ 是 $-\dfrac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{A} - \overline{\boldsymbol{A}}')$ 的全体特征值. 证明: 对 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ, 有 $\lambda_1 \leq \mathrm{Im}\,\lambda \leq \lambda_n$.

♣ ♣ ♣

§ 1.7 解答或提示

[问题 2017S01] 参考高代白皮书例 6.29.

[问题 2017S02] 经计算特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{A}| = \lambda(\lambda - a)(\lambda - 1)^2$. 分以下三种情况讨论.

(1) 若 $a = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 (2 重), 1 (2 重). 经计算可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$, 于是特征值 0 的几何重数等于 $4 - 3 = 1$, 小于其代数重数, 从而 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化. 另外, 特征值 1 的几何重数等于 1, 也小于其代数重数.

(2) 若 $a=1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 (1 重), 1 (3 重). 经计算可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4)=3$, 于是特征值 1 的几何重数等于 $4-3=1$, 小于其代数重数, 从而 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

(3) 若 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 (1 重), a (1 重), 1 (2 重). 对 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4$ 实施如下初等变换 (第三列乘以 -1 加到第二列, 第四列加到第二列, 第二列乘以 a 加到第三列) 变为:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&a-1&a&0\\a-2&0&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\a-2&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则特征值 1 的几何重数也等于 2, 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4)=2$, 从而可得 $a=2$.

本题也有更简洁的解法. 将 $\boldsymbol{A}$ 的第一行和第四行对换, 再将第一列和第四列对换, 得到的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 相似 (参考高代教材习题 4.3.10):

$$\boldsymbol{P}_{14}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{14}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&a&a&0\\0&0&1&a-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

然后再利用高代白皮书例 7.56, 经过简单讨论后即得 $a=2$.

[问题 2017S03] 参考高代白皮书第 6 章解答题 13.

[问题 2017S04] 参考高代白皮书例 6.34.

[问题 2017S05] 将原矩阵方程整理为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})$, 我们只要验证 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 没有公共的特征值, 那么由高代白皮书例 6.88 即得原矩阵方程只有零解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$.

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 0, $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 ($n-1$ 重), n (1 重), $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 ($n-1$ 重), $1-n$ (1 重);

(3) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为偶数, $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 的特征值全为奇数;

(4) $\boldsymbol{A}$ 所有特征值的实部落在 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 中, $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 所有特征值的实部落在 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$ 中.

[问题 2017S06] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/6785447.html.

[问题 2017S07] 由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 都是实对称阵可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 再由 [问题 2017S06] 和高代白皮书例 6.41 可知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可同时对角化 (事实上, 由例 9.124 可

知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可同时正交对角化), 即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\},$$

于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P})=\mathrm{diag}\{\lambda_1\mu_1,\lambda_2\mu_2,\cdots,\lambda_n\mu_n\}.$$

因此, 对 $\boldsymbol{AB}$ 的任一特征值 s, 一定存在 $i\in[1,n]$, 使得 $s=\lambda_i\mu_i$.

[问题 2017S08] (1) 由 [问题 2017S06] 可知, 实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 有完全的特征向量系, 即任一特征值的代数重数等于其几何重数. 任取 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值 λ_0, 注意到矩阵

$$\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_0-a_1 & -1 & & & & \\ -1 & \lambda_0-a_2 & -1 & & & \\ & -1 & \lambda_0-a_3 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \lambda_0-a_{n-1} & -1 \\ & & & & -1 & \lambda_0-a_n\end{pmatrix}$$

右上角的 $n-1$ 阶子式是一个主对角元全为 -1 的下三角行列式, 从而其值非零, 于是 $\mathrm{r}(\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=n-1$, 从而特征值 λ_0 的几何重数等于 $n-(n-1)=1$, 特征值 λ_0 的代数重数也等于 1. 注意到 λ_0 的任意性, 故 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值. 也可以用第七章的方法来证明, 注意到特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 右上角的 $n-1$ 阶子式是一个主对角元全为 -1 的下三角行列式, 其值为 $(-1)^{n-1}$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶行列式因子 $D_{n-1}(\lambda)=1$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子组和不变因子组均为 $1,\cdots,1,f(\lambda)$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式等于其特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 故极小多项式无重根, 即特征多项式 $f(\lambda)$ 无重根, 于是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值.

(2) 由高代白皮书例 6.63 或例 7.26 或例 7.30 可知 $\dim C(\boldsymbol{A})=n$, 并且 $C(\boldsymbol{A})$ 的一组基为 $\{\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\}$.

[问题 2017S09] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/6819416.html.

[问题 2017S10] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/6821754.html.

[问题 2017S11] 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$, 从而 $f(\lambda)\boldsymbol{I}_n-f(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $f(\lambda)-f(\lambda_1),f(\lambda)-f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda)-f(\lambda_n)$,

于是

$$g(\lambda)=|f(\lambda)\boldsymbol{I}_n-f(\boldsymbol{A})|=(f(\lambda)-f(\lambda_1))(f(\lambda)-f(\lambda_2))\cdots(f(\lambda)-f(\lambda_n)).$$

注意到 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征多项式为 $h(\lambda)=(\lambda-f(\lambda_1))(\lambda-f(\lambda_2))\cdots(\lambda-f(\lambda_n))$, 故由 Cayley-Hamilton 定理可得

$$g(\boldsymbol{A})=(f(\boldsymbol{A})-f(\lambda_1)\boldsymbol{I}_n)(f(\boldsymbol{A})-f(\lambda_2)\boldsymbol{I}_n)\cdots(f(\boldsymbol{A})-f(\lambda_n)\boldsymbol{I}_n)=h(f(\boldsymbol{A}))=\boldsymbol{O}.$$

[问题 2017S12] 参考高代白皮书第 8 章解答题 13.

[问题 2017S13] 参考高代白皮书例 8.30. 也可以这样证明, 注意到问题的条件和结论在合同变换 $\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}\mapsto\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1})'$ 下不改变, 故不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O}\}$ 为合同标准型. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{B}_{12}'&\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$ 为对应的分块, 则由

$$0=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}_{11})$$

以及 $\boldsymbol{B}_{11}$ 的半正定性可得 $\boldsymbol{B}_{11}$ 的主对角元全为零, 再由半正定阵的性质 (高代白皮书例 8.70) 可知 $\boldsymbol{B}_{11}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{B}_{12}=\boldsymbol{O}$, 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

[问题 2017S14] 要证 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵, 只要证 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个顺序主子式全大于零即可. 注意到每个顺序主子式都与 $|\boldsymbol{A}|$ 有相同的形状, 故只要证明 $|\boldsymbol{A}|>0$ 即可. 由高代白皮书例 1.18 (Cauchy 行列式) 可得 $|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2\Big/\prod\limits_{i,j=1}^{n}(a_i+a_j)>0$, 故结论得证. 另一种证法请参考 [问题 2019S11].

[问题 2017S15] 注意到问题的条件和结论在 (正交) 合同变换 $\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{P}_{in}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{in}$ 下不改变, 其中 $\boldsymbol{P}_{in}$ 是对换第 i,n 行的初等矩阵, 故只要考虑 $i=n$ 的情形即可. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{A}_n$ 是去掉 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 行和第 n 列的主子阵, $\boldsymbol{y}=(x_1,\cdots,x_{n-1})'$, 则在 $x_n=1$ 的条件下, 考虑的二次型为

$$f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{y}',1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_n&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}'&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\1\end{pmatrix}.$$

由高代白皮书例 8.40 和行列式的降阶公式可知, 在 $x_n=1$ 的条件下, 当 $\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{A}_n^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ 时, $f(\boldsymbol{x})$ 取到最小值 $a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}_n^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{A}_n|}$.

[**问题 2017S16**] 参考高代白皮书例 9.63.

[**问题 2017S17**] 参考高代白皮书例 8.28.

[**问题 2017S18**] 参考高代白皮书例 9.54.

§ 1.8 17 级高等代数 I 每周一题

[问题 2017A01] 设

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & \cdots & 3n-2 \\ 1 & 5 & 9 & \cdots & 4n-3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $n\geq 2$, A_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式. 证明: $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}$.

[问题 2017A02] 设 $|\boldsymbol{A}|$ 为 n 阶行列式, 其中 n 为奇数, 且 $|\boldsymbol{A}|$ 的所有元素都是整数. 证明: 若对任意的 $1\leq i\leq n$, a_{ii} 都是偶数, 且对任意的 $1\leq i<j\leq n$, $a_{ij}+a_{ji}$ 都是偶数, 则 $|\boldsymbol{A}|$ 也是偶数.

[问题 2017A03] 求下列 $n\,(n\geq 2)$ 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x+x^2 & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

[问题 2017A04] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 2 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$ 和 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$, 求证: $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$.

[问题 2017A05] 设

$$f_i(x)=a_{in}x^n+a_{i,n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{i1}x+a_{i0}\,(0\leq i\leq n),$$

其中 $a_{ij}\,(0\leq i,j\leq n)$ 都是整数. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$ 是对应的 $n+1$ 阶方阵, 证明:

(1) 对任意的整数 x, $f_0(x),f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 的最大公因数都要整除 $|\boldsymbol{A}|$;

(2) 存在 $n+1$ 阶整数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=I_{n+1}$ 的充分必要条件是, 存在 $n+1$ 个不同的整数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$, 使得 $n+1$ 阶矩阵 $\boldsymbol{C}=(f_i(x_j))_{0\leq i,j\leq n}$ 满足 $|\boldsymbol{C}|=\pm\prod\limits_{0\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$.

[问题 2017A06] 设 n 阶循环矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

是非异阵, 试求逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

[问题 2017A07] 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称阵, $\boldsymbol{C}$ 是 n 阶实反对称阵, 满足 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$. 证明: 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

[问题 2017A08] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 2 阶方阵, 若存在 2 阶方阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$ 且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}$, 则记为 $\boldsymbol{A}\sharp\boldsymbol{B}$. 证明: 在所有 2 阶方阵构成的集合中, $\sharp$ 是一个等价关系.

[问题 2017A09] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$ 且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}$, 则记为 $\boldsymbol{A}\sharp\boldsymbol{B}$. 证明: 若 $n\geq 3$, 则在所有 n 阶方阵构成的集合中, $\sharp$ 不是等价关系.

[问题 2017A10] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $m\times n$, $p\times q$ 和 $m\times q$ 矩阵, $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 证明:

(1) $\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 成立当且仅当矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 有解, 其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分别为 $n\times q$ 和 $m\times p$ 未知矩阵;

(2) $\mathrm{r}(\boldsymbol{M})\leq\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+q,\mathrm{r}(\boldsymbol{B})+m\}$;

(3) 试给出 Sylvester 不等式和 Frobenius 不等式 (高代白皮书例 3.66 和例 3.69) 等号成立的充分必要条件.

[问题 2017A11] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 请用高代 I 的方法证明: $\boldsymbol{A}$ 的所有 r 阶主子式之和不等于零.

[问题 2017A12] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 为 n 阶实方阵, $\boldsymbol{S}$ 为 n 阶实反对称阵, a 为非零实数, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}=a\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{S}$. 求证: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'$ 是非异阵.

注　本题是第九届全国大学生数学竞赛预赛第四题结论的推广.

[问题 2017A13] 任取 9 个不同的实数 $a_1,\cdots,a_9$, 证明: 存在 $1,\cdots,9$ 的全排列

$k_1, \cdots, k_9$, 使得

$$\begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} & a_{k_3} \\ a_{k_4} & a_{k_5} & a_{k_6} \\ a_{k_7} & a_{k_8} & a_{k_9} \end{vmatrix} \neq 0.$$

注　本题可以推广到 n^2 个不同实数的情形.

[问题 2017A14] 设 V, U 分别为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n, m 维线性空间, 线性映射 $\boldsymbol{\varphi} : V \to U$ 在 V, U 的某组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 证明:

(1) 存在 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和 U 的一组基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这两组基下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 其中 $r = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$;

(2) $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi} = L(\boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$, $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\varphi} = L(\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_r)$. 特别地, $\dim \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi} = n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi}) = \dim \mathrm{Im}\,\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$;

(3) 存在线性映射 $\boldsymbol{\varphi}_i : V \to U$, 使得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi}_i) = 1\,(1 \le i \le r)$ 且 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2 + \cdots + \boldsymbol{\varphi}_r$.

[问题 2017A15] (1) 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 $n\,(n \ge 2)$ 维线性空间 V 上的线性变换, 证明: 若 V 只有平凡的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 必为 V 的自同构.

(2) 设 $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 $2n+1\,(n \ge 1)$ 维线性空间 V 上的两个非零线性变换, 满足 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$. 证明: V 既有非平凡的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间, 也有非平凡的 $\boldsymbol{\psi}$–不变子空间.

(3) 举例说明: 当 V 的维数是偶数时, (2) 的结论一般不成立.

[问题 2017A16] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{3m} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{O}$, 其中 m 为正整数, 求证: $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n$ 是非异阵, 并求其逆阵.

♣ ♣ ♣

§ 1.8 解答或提示

[问题 2017A01] 由行列式的性质可知 $a_{11}A_{i1} + a_{12}A_{i2} + \cdots + a_{1n}A_{in} = \delta_{1i}|\boldsymbol{A}|\,(1 \le i \le n)$, 上述 n 个等式相加后有

$$a_{11}\sum_{i=1}^{n} A_{i1} + a_{12}\sum_{i=1}^{n} A_{i2} + \cdots + a_{1n}\sum_{i=1}^{n} A_{in} = |\boldsymbol{A}|. \tag{1.8.1}$$

同理可得

$$a_{21}\sum_{i=1}^{n} A_{i1} + a_{22}\sum_{i=1}^{n} A_{i2} + \cdots + a_{2n}\sum_{i=1}^{n} A_{in} = |\boldsymbol{A}|. \tag{1.8.2}$$

注意到 $4a_{1j}-3a_{2j}=1\,(1\leq j\leq n)$, 故将 (1.8.1) 式乘以 4 减去 (1.8.2) 式乘以 3 可得

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ij}=|\boldsymbol{A}|.$$

[问题 2017A02] 设整数行列式 $|\boldsymbol{A}|=|a_{ij}|$, 将 $|\boldsymbol{A}|$ 的某个元素加上 2 的整数倍, 其余元素保持不变, 这种操作称为 “加 2 变换”. 例如, 将 a_{11} 变为 $a_{11}+2m$, 其中 m 为整数, $|\boldsymbol{A}|$ 的其余元素保持不变, 得到的新行列式记为 $|\boldsymbol{B}|$. 将 $|\boldsymbol{B}|$ 的第一行拆分为 $(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})+(2m,0,\cdots,0)$, 则由拆分法可得 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+2mA_{11}$, 于是加 2 变换得到的行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 与原行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 保持相同的奇偶性. 回到本题的证明. 由于 $|\boldsymbol{A}|$ 的主对角元 a_{ii} 都为偶数, 故可利用加 2 变换将 a_{ii} 都变成 0; 又 $|\boldsymbol{A}|$ 关于主对角线的对称点都满足 $a_{ij}+a_{ji}$ 为偶数, 故 a_{ji} 与 $-a_{ij}$ 有相同奇偶性, 于是可利用加 2 变换将 a_{ji} 都变成 $-a_{ij}$; 最后得到的行列式记为 $|\boldsymbol{B}|$. 根据上述操作可知 $|\boldsymbol{B}|$ 为奇数阶反对称阵, 由高代白皮书例 1.43 可得 $|\boldsymbol{B}|=0$, 又 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $|\boldsymbol{B}|$ 有相同的奇偶性, 于是 $|\boldsymbol{A}|$ 必为偶数. 熟悉有限域 $\mathbb{F}_2=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\bar{0},\bar{1}\}$ 的读者, 也可以用 “模 2 同余” 的方法来证明本题, 具体细节可参考教学论文 [9]. 当然, 直接利用高代白皮书例 1.43 的证明过程来讨论也可以.

[问题 2017A03] 记 n 阶三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2\end{vmatrix},$$

则由高代白皮书例 1.14 可得 $D_n=x^{2n}+x^{2n-2}+\cdots+x^2+1$. 将原行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的第一列拆分为 $(1+x^2,x,0\cdots,0)'+(0,x^2,0,\cdots,0)'$, 于是由拆分法可得

$$|\boldsymbol{A}|=D_n-x^3D_{n-2}=x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-x^{2n-3}+\cdots+x^4-x^3+x^2+1.$$

[问题 2017A04] 由 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 以及 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$ 可得

$$\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{CAB}-\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CB})-(\boldsymbol{CB})\boldsymbol{A},$$

故由矩阵迹的性质可得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^2) = 0$. 设 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$, 则有 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}) = c_{11} + c_{22} = 0$ 以及 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^2) = 2(c_{11}^2 + c_{12}c_{21}) = 0$. 若 $c_{12} = c_{21} = 0$, 则 $c_{11} = c_{22} = 0$, 于是 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$, 结论得证. 若 c_{12}, c_{21} 不全为零, 则由矩阵的转置不妨假设 $c_{21} \neq 0$. 令 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} c_{11} & 1 \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{P}| = -c_{21} \neq 0$, 即 $\boldsymbol{P}$ 为可逆阵. 经计算可知

$$\boldsymbol{CP} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & -c_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 1 \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_{11} \\ 0 & c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 1 \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{PN},$$

其中 $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是二阶幂零 Jordan 块 (参考高代白皮书例 2.2), 即有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP} = \boldsymbol{N}$. 将条件改写为 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}) = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})$, $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}) = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})$, 经过计算可得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b\boldsymbol{N}$, 于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP} = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}) - (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) = (a\boldsymbol{N})(b\boldsymbol{N}) - (b\boldsymbol{N})(a\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{O},$$

即 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$, 这与 $c_{21} \neq 0$ 矛盾.

[问题 2017A05] (1) 考虑

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

对任意给定的整数 x, 将 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 $i+1$ 列乘以 x^i 加到第一列上 $(1 \leq i \leq n)$, 由行列式的性质可得

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} f_0(x) & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ f_1(x) & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

因此, $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_n(x)$ 的最大公因数都要整除 $|\boldsymbol{A}|$.

(2) 我们先证明: 存在整数矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_{n+1}$ 的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$. 若 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 在有理数域上的逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 其实是一个整数矩阵, 这就是要找的 $\boldsymbol{B}$. 反之, 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_{n+1}$ 取行列式可得 $1=|\boldsymbol{I}_{n+1}|=|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$, 又 $|\boldsymbol{A}|,|\boldsymbol{B}|$ 都是整数, 故只能是 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$. 注意到矩阵 $\boldsymbol{C}$ 有如下的矩阵分解:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AV}=\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}&\cdots&a_{0n}\\a_{10}&a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n0}&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\x_0&x_1&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_0^n&x_1^n&\cdots&x_n^n\end{pmatrix},$$

其中 Vandermonde 行列式 $|\boldsymbol{V}|=\prod\limits_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$, 故 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$ 的充分必要条件是存在 $n+1$ 不同的整数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$, 使得 $|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{AV}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{V}|=\pm\prod\limits_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

[问题 2017A06] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/8848641.html.

[问题 2017A07] 注意到 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}'=-\boldsymbol{C}$, 故由 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$ 转置可得 $\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{O}$. 再由 $\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^2=\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{CB}+\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2$ 可得 $\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{C}^2$, 于是 $\boldsymbol{B}^4=-\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{C}^2=-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$. 由于 $\boldsymbol{B}$ 为实对称阵, 故 $\boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{B}^2)'=\boldsymbol{O}$, 从而由高代白皮书例 2.9 可得 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}$, 这即为 $\boldsymbol{BB}'=\boldsymbol{O}$, 于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 另一方面可得 $\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{O}$, 从而 $\boldsymbol{CC}'=\boldsymbol{O}$, 再次由高代白皮书例 2.9 可得 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$, 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$.

[问题 2017A08] $\sharp$ 关系的自反性和对称性是显然的. 若 $\boldsymbol{A}\sharp\boldsymbol{B}$, 则由行列式的性质和矩阵迹的性质可知 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$, 即矩阵的行列式和迹是 $\sharp$ 关系下的不变量. 我们先来证一个简单的引理.

引理　若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{K})$ 相似, 即存在非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, 则 $\boldsymbol{A}\sharp\boldsymbol{B}$.

引理的证明　令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}$, 则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{QP}$, 即 $\boldsymbol{A}\sharp\boldsymbol{B}$.

下面按照 2 阶矩阵的行列式和迹, 把 $M_2(\mathbb{K})$ 分成三个互不相交的子集 S_1,S_2,S_3, 分别来证明 $\sharp$ 关系的传递性.

(1) 考虑子集 $S_1=\{\boldsymbol{A}\in M_2(\mathbb{K})\mid|\boldsymbol{A}|\neq0\}$, 即 2 阶非异阵全体. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in S_1$ 且 $\boldsymbol{A}\sharp\boldsymbol{B}$, 则存在非异阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\in M_2(\mathbb{K})$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{QP}$, 故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, 即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似. 因此由引理可知, S_1 中的 $\sharp$ 关系等价于相似关系, 从而满足传递性 (参考高代教材命题 4.3.1).

(2) 考虑子集 $S_2 = \{\boldsymbol{A} \in M_2(\mathbb{K}) \mid |\boldsymbol{A}| = 0, \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \neq 0\}$, 任取 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in S_2$, 则 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ 且 $a_{11} + a_{22} \neq 0$. 以下不妨设 $a_{21} \neq 0$ ($a_{12} \neq 0$ 情形的讨论完全类似), 令 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{11} \\ -a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{P}| = a_{21}(a_{11} + a_{22}) \neq 0$ 且满足

$$\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{11} \\ -a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{11} \\ -a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{11} + a_{22} \end{pmatrix} = \boldsymbol{PC},$$

即有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{C} = \operatorname{diag}\{0, \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\}$. 同理任取 $\boldsymbol{B} \in S_2$, 存在非异阵 $\boldsymbol{Q} \in M_2(\mathbb{K})$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ} = \operatorname{diag}\{0, \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\}$. 若此时 $\boldsymbol{A} \sharp \boldsymbol{B}$, 则由 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$ 可得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}$, 于是 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{PQ}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PQ}^{-1})$, 即 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似. 因此由引理可知, S_2 中的 $\sharp$ 关系也等价于相似关系, 从而满足传递性.

(3) 考虑子集 $S_3 = \{\boldsymbol{A} \in M_2(\mathbb{K}) \mid |\boldsymbol{A}| = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 0\}$, 任取 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in S_3$, 则 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ 且 $a_{11} + a_{22} = 0$. 若 $a_{12} = a_{21} = 0$, 则 $a_{11} = a_{22} = 0$, 即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. 若 a_{12}, a_{21} 不全为零, 则由 [问题 2017A04] 完全类似的讨论可知, 存在非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 这就是说, S_3 中除了零矩阵之外, 其余非零矩阵都相似于 $\boldsymbol{N}$, 从而它们彼此之间相似. 令 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则容易验证 $(\boldsymbol{NP}^{-1})(\boldsymbol{PQ}) = \boldsymbol{NQ} = \boldsymbol{O}$, $(\boldsymbol{PQ})(\boldsymbol{NP}^{-1}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{QN})\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{PNP}^{-1} = \boldsymbol{A}$, 于是 $\boldsymbol{A} \sharp \boldsymbol{O}$. 因此由引理可知, S_3 中任意两个矩阵都满足 $\sharp$ 关系, 故其传递性是平凡的.

[问题 2017A09] $\sharp$ 关系的自反性和对称性是显然的. 下面举例说明 $\sharp$ 不满足传递性, 从而不是等价关系. 令

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则有如下的矩阵乘积:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{AJ}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{JA}, \quad \boldsymbol{O} = \boldsymbol{BC}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{CB},$$

于是 $\boldsymbol{J} \sharp \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{O} \sharp \boldsymbol{B}$. 用反证法, 若 $\sharp$ 满足传递性, 则必有 $\boldsymbol{J} \sharp \boldsymbol{O}$, 即存在 3 阶矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{PQ}$, $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{QP}$. 由秩的基本不等式可知 $2 = \operatorname{r}(\boldsymbol{J}) \leq \min\{\operatorname{r}(\boldsymbol{P}), \operatorname{r}(\boldsymbol{Q})\}$, 从而

$\mathrm{r}(\boldsymbol{P}) \geq 2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{Q}) \geq 2$. 再由 Sylvester 不等式可得

$$0 = \mathrm{r}(\boldsymbol{O}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{QP}) \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{Q}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{P}) - 3 \geq 2 + 2 - 3 = 1,$$

矛盾! 因此 $\sharp$ 不满足传递性. 当 $n \geq 4$ 时, 可构造 n 阶分块对角阵, 其中的 3 阶分块即为上述构造, 剩下的 $n-3$ 阶分块为单位阵 $\boldsymbol{I}_{n-3}$. 读者不难验证这样的构造可以说明 $\sharp$ 不满足传递性.

[问题 2017A10] (1) 参考高代白皮书例 3.90.

(2) 由高代白皮书的例 3.63 可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{M}) \leq \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix} + \mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + q, \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{M}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{C}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{O} \mid \boldsymbol{B}) \leq m + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}),$$

再由上述两个不等式即得结论.

(3) 由高代白皮书例 3.66 的证明可知, Sylvester 不等式等号成立当且仅当 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 成立, 再由 (1) 可知, 这当且仅当存在矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{BQ} = \boldsymbol{I}_n$ 成立. 由高代白皮书例 3.69 的证明可知, Frobenius 不等式等号成立当且仅当 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BC} \end{pmatrix} = \mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{BC})$ 成立, 再由 (1) 可知, 这当且仅当存在矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAB} + \boldsymbol{BCQ} = \boldsymbol{B}$ 成立.

[问题 2017A11] 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列分块. 因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$, 故不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的极大无关组, 其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$. 由高代白皮书例 3.87 可知, $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶主子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \neq 0$. 任取 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r 阶主子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$, 其中 $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$, 设 $(\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}) = (\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r})\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是 r 阶实矩阵. 对上式的矩阵乘法用两次 Cauchy-Binet 公式可得:

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} |\boldsymbol{P}|,$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} |\boldsymbol{P}|,$$

于是

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} |\boldsymbol{P}|^2,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的所有 r 阶主子式或者等于零或者与非零主子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$ 同号, 从而 $\sum\limits_{1\leq j_1<\cdots<j_r\leq n}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$ 同号, 故不等于零.

[问题 2017A12] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/12272213.html 的推广 3.

[问题 2017A13] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/8848641.html 的命题 7.

[问题 2017A14] (1) 和 (2) 参考高代白皮书例 4.22 及其注. (3) 由 (1) 即得.

[问题 2017A15] (1) 注意到 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间, 若 V 只有平凡的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间, 则或者 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}=0$ 或者 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}=V$. 若 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}=V$, 则 $\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{0}$, 又 $\dim V\geq 2$, 故 V 必有非平凡的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间, 矛盾. 因此只能是 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}=0$, 即 $\boldsymbol{\varphi}$ 是单射, 从而是自同构.

(2) 在等式 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}=-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}$ 两边同取行列式可得

$$|\boldsymbol{\varphi}||\boldsymbol{\psi}|=|\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}|=|-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}|=(-1)^{2n+1}|\boldsymbol{\psi}||\boldsymbol{\varphi}|=-|\boldsymbol{\varphi}||\boldsymbol{\psi}|,$$

于是 $|\boldsymbol{\varphi}||\boldsymbol{\psi}|=0$, 从而或者 $|\boldsymbol{\varphi}|=0$ 或者 $|\boldsymbol{\psi}|=0$. 不妨设 $|\boldsymbol{\varphi}|=0$, 于是 $\boldsymbol{\varphi}$ 不是自同构, 又 $\boldsymbol{\varphi}\neq\mathbf{0}$, 故 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 的非平凡 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间. 对任意的 $\boldsymbol{v}\in\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}$, 即 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$, 在等式 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{0}$ 两边同时作用 $\boldsymbol{v}$ 可得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{v}))=\mathbf{0}$, 即 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{v})\in\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}$, 故 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}$ 也是 $\boldsymbol{\psi}$–不变子空间. 因此, V 既有非平凡的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}$, 也有非平凡的 $\boldsymbol{\psi}$–不变子空间 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}$.

(3) 设 $V=\mathbb{K}^2$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则容易验证 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$, 并且当 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 时, V 只有平凡的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间; 当 $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ 时, V 只有平凡的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间以及平凡的 $\boldsymbol{\psi}$–不变子空间.

[问题 2017A16] 参考高代白皮书例 5.76.

§ 1.9　17 级高等代数 II 每周一题

[问题 2018S01] (1) 设 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(a_{ij}(x_1,x_2,\cdots,x_m))$ 为 n 阶方阵, 其元素 $a_{ij}(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 都是数域 $\mathbb{K}$ 上关于未定元 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的多项式. 设 $g(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $h_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)\neq 0\,(1\leq i\leq k)$ 都是数域 $\mathbb{K}$ 上关于未定元 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的多项式,

$$U=\Big\{(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in\mathbb{K}_m\mid h_i(a_1,a_2,\cdots,a_m)\neq 0\ (1\leq i\leq k)\Big\}.$$

若对所有的 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in U$, 都成立

$$|\boldsymbol{A}(a_1,a_2,\cdots,a_m)|=g(a_1,a_2,\cdots,a_m),$$

证明: $|\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m)|=g(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 恒成立 (作为多元多项式相等).

(2) 利用 (1) 给出高代教材 [1] 习题 1.5.4 的简单解法.

(3) 利用多元多项式环的整性给出高代教材 [1] 例 2.5.2 的严格证明.

[问题 2018S02] 设 $M_n(\mathbb{K})$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 阶方阵全体构成的线性空间,

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&1&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

$M_n(\mathbb{K})$ 上的线性变换 $\boldsymbol{\eta}$ 定义为 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}$. 试求 $\boldsymbol{\eta}$ 的全体特征值及其特征向量.

[问题 2018S03] 有限维线性空间上的线性变换至多只有有限个特征值. 试构造无限维线性空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}$ 有无限个特征值.

[问题 2018S04] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维复列向量, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$. 试求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可对角化的充要条件.

[问题 2018S05] 设 $\boldsymbol{C}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 证明:

(1) $\boldsymbol{C}$ 是幂零阵当且仅当 $\boldsymbol{C}$ 的特征值全为零;

(2) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=1$, 则 $\boldsymbol{C}$ 是幂零阵当且仅当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})=0$;

(3) 若 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})=0$ 且存在数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 使得 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, 以及 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^i)=0\,(1\leq i\leq n-1)$ 成立, 则必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})\neq 1$.

[问题 2018S06] 请用高代教材 [1] 第六章的方法证明以下问题:

(1) 设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{I}_n$, 其中 m 是正整数, 证明: $\boldsymbol{A}$ 在复数域上可对角化;

(2) 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, 满足 $\boldsymbol{\varphi}^m=\boldsymbol{I}_V$, 其中 m 是正整数. 设 $W=\{\boldsymbol{v}\in V\mid\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\}$ 为 V 的子空间, 线性变换 $\boldsymbol{\psi}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\boldsymbol{\varphi}^i$, 证明:

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\psi})=\dim W.$$

[问题 2018S07] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵, 请用高代教材 [1] 第六章的方法证明:

(1) $\boldsymbol{A}$ 可对角化当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式无重根;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'=\overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

[问题 2018S08] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, $f(\lambda),m(\lambda)$ 分别是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征多项式和极小多项式. 如果存在 V 的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间 V_1,V_2, 使得

$$V=V_1\oplus V_2,\quad \dim V_1<\dim V,\quad \dim V_2<\dim V,$$

则称 V 是 $\boldsymbol{\varphi}$–可分解的, 否则称 V 是 $\boldsymbol{\varphi}$–不可分解的. 证明: V 是 $\boldsymbol{\varphi}$–不可分解的充分必要条件是 $f(\lambda)=m(\lambda)=p(\lambda)^k$, 其中 $p(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的首一不可约多项式, $k\geq 1$.

[问题 2018S09] 设 V 是复数域上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, U 是 V 的非零 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间. 设 λ_0 是限制变换 $\boldsymbol{\varphi}|_U$ 的特征值, 证明: $\boldsymbol{\varphi}|_U$ 的属于特征值 λ_0 的 Jordan 块的个数不超过 $\boldsymbol{\varphi}$ 的属于特征值 λ_0 的 Jordan 块的个数. 特别地, 若 $\boldsymbol{\varphi}$ 的属于特征值 λ_0 的 Jordan 块只有 1 个, 那么 $\boldsymbol{\varphi}|_U$ 的属于特征值 λ_0 的 Jordan 块也只有 1 个.

[问题 2018S10] 设 $\boldsymbol{A}$ 是复循环矩阵, $f(z)$ 是收敛半径为 $+\infty$ 的复幂级数, 证明: $f(\boldsymbol{A})$ 也是循环矩阵.

[问题 2018S11] 求下列实二次型的规范标准型:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^n|i-j|x_ix_j.$$

[问题 2018S12] 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维非零实列向量,

(1) 证明: $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}>0$ 成立的充分必要条件是存在 n 阶正定实对称阵 $\boldsymbol{A}$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$;

(2) 判断下列结论是否正确, 并说明理由: $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}\geq 0$ 成立的充分必要条件是存在 n 阶半正定实对称阵 $\boldsymbol{A}$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$.

[问题 2018S13] 设 V 是实 (复) 线性空间, 若存在 V 上的实值函数 $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$, 使得对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, $c \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, 满足:

(i) 非负性: $\|\boldsymbol{\alpha}\| \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$;

(ii) 齐次性: $\|c\boldsymbol{\alpha}\| = |c| \cdot \|\boldsymbol{\alpha}\|$;

(iii) 三角不等式: $\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|$,

则称 $\|\cdot\|$ 是 V 上的一个范数. 给定范数的实 (复) 线性空间称为赋范线性空间. 例如在内积空间 V 中, 由内积 $(-,-)$ 诱导的范数为 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})^{\frac{1}{2}}$, 因此内积空间必为赋范线性空间. 现设 $(V, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 并且范数满足平行四边形法则, 即对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 满足

$$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\|^2 + \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|^2 = 2\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + 2\|\boldsymbol{\beta}\|^2,$$

证明: 存在 V 上的一个内积 $(-,-)$, 使得其诱导的范数即为 $\|\cdot\|$.

[问题 2018S14] 设 V 为 n 维欧氏空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的非异线性变换. 证明: $\boldsymbol{\varphi}$ 保持向量的夹角不变 (即对任意的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, 它们之间的夹角等于 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\beta})$ 之间的夹角) 当且仅当 φ 保持向量的正交性不变 (即对任意正交的向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, 它们的像 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\beta})$ 也正交).

[问题 2018S15] 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是乘法可交换的 n 阶实对称阵, 且 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 都可逆, 证明:

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}.$$

[问题 2018S16] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为 n 阶实对称阵, 满足 $a_{ij} \geq 0\,(1 \leq i, j \leq n)$. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值, 证明: 存在某个特征值 $\lambda_j = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$.

♣ ♣ ♣

§ 1.9 解答或提示

[问题 2018S01] 参考高代白皮书例 5.59.

[问题 2018S02] 参考高代白皮书例 6.14.

[问题 2018S03] 设 V 为实数域上无穷次可微函数构成的实线性空间, $\boldsymbol{\varphi} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 为 V 上的求导变换. 由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$, 故任一实数 λ 都是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征值, 从而 $\boldsymbol{\varphi}$ 有无限个特征值.

[问题 2018S04] 参考高代白皮书例 6.21 以及第 328 页的注.

[问题 2018S05] (1) 参考高代白皮书例 6.13. (2) 参考高代白皮书例 6.82 或例 7.48. (3) 用反证法, 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=1$, 则存在非零列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{K}^n$, 使得 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$. 由条件 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^i)=0$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^i)\leq\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=1\,(0\leq i\leq n-1)$ 以及 (2) 的结论可知 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^i$ 都是幂零阵, 于是 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^i$ 的特征值全为零. 注意到 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}$, 故 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^i$ 关于特征值 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{\alpha}$ 的特征向量, 于是 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{\alpha}=0$, 从而 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\,(0\leq i\leq n-1)$. 由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=1$, 故 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 $V_{\boldsymbol{C}}$ 的维数等于 $n-1$. 由上面的推导可知, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}$ 都属于 $V_{\boldsymbol{C}}$, 于是这 n 个列向量必线性相关, 即存在不全为零的数 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}\in\mathbb{K}$, 使得 $c_0\boldsymbol{\alpha}+c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 设 $g(\lambda)=c_0+c_1\lambda+\cdots+c_{n-1}\lambda^{n-1}$, 则 $g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 又设 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 则由假设 $f(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, 并且由 Cayley-Hamilton 定理可得 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$. 注意到 $g(\lambda)$ 是次数小于 n 的非零多项式, $f(\lambda)$ 是次数等于 n 的不可约多项式, 故 $(f(\lambda),g(\lambda))=1$, 于是存在 $u(\lambda),v(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]$, 使得 $f(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda)=1$. 上式代入 $\lambda=\boldsymbol{A}$, 并作用上 $\boldsymbol{\alpha}$ 可得 $\boldsymbol{\alpha}=u(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}+v(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 矛盾!

[问题 2018S06] (1) 参考高代白皮书例 6.66.

(2) 任取 V 的一组基, 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{K})$, 则 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{I}_n$, 于是 $\dim W=\dim\mathrm{Ker}(\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{I}_V)=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)$. 由 (1) 可知 $\boldsymbol{A}$ 复可对角化, 即存在非异阵 $\boldsymbol{P}\in M_n(\mathbb{C})$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 也满足 $\lambda_i^m=1$. 通过对换过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量, 不妨假设 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=1$, $\lambda_j\neq 1\,(r+1\leq j\leq n)$, 于是 $\dim W=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{I}_n)=n-(n-r)=r$. 注意到 $\boldsymbol{\psi}$ 的表示矩阵 $\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\boldsymbol{A}^i$, 故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\lambda_j^i\,(1\leq j\leq n)$. 当 $j>r$ 时, 由 $\lambda_j^m=1$ 且 $\lambda_j\neq 1$ 可得 $\lambda_j^{m-1}+\cdots+\lambda_j+1=0$, 于是

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varphi})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=\sum_{j=1}^n\left(\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_j^i\right)=r=\dim W.$$

[问题 2018S07] (1) 参考高代白皮书例 6.66.

(2) 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/6785447.html, 或教学论文 [22].

[问题 2018S08] 参考教学论文 [12] 的例 2.

[问题 2018S09] 利用线性无关特征向量的方法请参考高代白皮书例 7.45, 下面给出一

个纯代数的证明. 取 U 的一组基并扩张为 V 的一组基, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示矩阵为分块上三角阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m=\dim U$ 阶方阵, 于是 $\boldsymbol{M}-\lambda_0\boldsymbol{I}_n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\lambda_0\boldsymbol{I}_{n-m}\end{pmatrix}$. 由 [问题 2017A10] (2) 可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{M}-\lambda_0\boldsymbol{I}_n)\leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I}_m)+n-m$, 于是特征值 λ_0 关于 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{A}$ 的几何重数之间满足不等式

$$t_{\boldsymbol{M}}(\lambda_0)=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{M}-\lambda_0\boldsymbol{I}_n)\geq m-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I}_m)=t_{\boldsymbol{A}}(\lambda_0),$$

再由特征值 λ_0 的几何重数等于属于特征值 λ_0 的 Jordan 块的个数即得结论. 由 [问题 2017A10] (2) 还可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{M}-\lambda_0\boldsymbol{I}_n)\leq \mathrm{r}(\boldsymbol{B}-\lambda_0\boldsymbol{I}_{n-m})+m$, 于是特征值 λ_0 关于 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{B}$ 的几何重数之间满足不等式

$$t_{\boldsymbol{M}}(\lambda_0)=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{M}-\lambda_0\boldsymbol{I}_n)\geq (n-m)-\mathrm{r}(\boldsymbol{B}-\lambda_0\boldsymbol{I}_{n-m})=t_{\boldsymbol{B}}(\lambda_0),$$

再由特征值 λ_0 的几何重数等于属于特征值 λ_0 的 Jordan 块的个数可得结论: 商空间 V/U 上的诱导变换 $\overline{\boldsymbol{\varphi}}$ 的属于特征值 λ_0 的 Jordan 块的个数不超过 $\boldsymbol{\varphi}$ 的属于特征值 λ_0 的 Jordan 块的个数 (参考高代白皮书例 4.53).

[问题 2018S10] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/8848641.html 的推论 6.

[问题 2018S11] 参考高代白皮书例 8.42 (2).

[问题 2018S12] (1) 参考高代白皮书例 8.51. (2) 不正确. 参考高代白皮书例 8.71.

[问题 2018S13] 我们只处理复赋范线性空间的情形, 实赋范线性空间的情形完全类似. 对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, 定义 V 上的二元运算

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{4}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{1}{4}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2+\frac{\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{\alpha}-\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2,$$

我们只要证明 $(-,-)$ 是复内积, 并且诱导的范数就是给定的范数 $\|\cdot\|$ 即可.

(1) *正定性* 由定义以及范数的齐次性和非负性可知

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{4}2^2\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\frac{\mathrm{i}}{4}|1+\mathrm{i}|^2\|\boldsymbol{\alpha}\|^2-\frac{\mathrm{i}}{4}|1-\mathrm{i}|^2\|\boldsymbol{\alpha}\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\geq 0,$$

且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

(2) 共轭对称性 由定义以及范数的齐次性可知

$$\begin{aligned}\overline{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}&=\frac{1}{4}\|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\|^2-\frac{1}{4}\|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}\|^2-\frac{\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{\beta}+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\|^2+\frac{\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{\beta}-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\|^2,\\&=\frac{1}{4}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{1}{4}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2+\frac{\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{\alpha}-\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).\end{aligned}$$

引理 (i) $(\mathbf{0},\boldsymbol{\beta})=0$; (ii) $(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\mathrm{i}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$; (iii) $(m\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(n\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2\left(\dfrac{m+n}{2}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\right)$.
引理的证明 (i) 和 (ii) 由定义以及范数的齐次性即得. 下面证明 (iii) 对任意的复数 m,n 成立. 由定义可得

$$\begin{aligned}(m\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})&=\frac{1}{4}\|m\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{1}{4}\|m\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2+\frac{\mathrm{i}}{4}\|m\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{\mathrm{i}}{4}\|m\boldsymbol{\alpha}-\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2,\\(n\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})&=\frac{1}{4}\|n\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{1}{4}\|n\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2+\frac{\mathrm{i}}{4}\|n\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{\mathrm{i}}{4}\|n\boldsymbol{\alpha}-\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2,\end{aligned}$$

将上述两式相加, 再用平行四边形法则替代 (只写四个中的一个, 其余同理)

$$\|m\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2+\|n\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=2\|\frac{m+n}{2}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2+2\|\frac{m-n}{2}\boldsymbol{\alpha}\|,$$

即得要证的等式. 特别地, 令 $m=2$, $n=0$, 则有 $(2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\beta})$.
(3) 第一变量保持加法 由定义以及上述引理可知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})&=\frac{1}{4}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{1}{4}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}\|^2+\frac{\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}-\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2,\\(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha},\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta})&=\frac{2}{4}\|\boldsymbol{\alpha}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{2}{4}\|\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}\|^2+\frac{2\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{\alpha}+\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{2\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{\alpha}-\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{\beta}\|^2,\\(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\gamma},\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta})&=\frac{2}{4}\|\boldsymbol{\gamma}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{2}{4}\|\boldsymbol{\gamma}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}\|^2+\frac{2\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{\gamma}+\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{\beta}\|^2-\frac{2\mathrm{i}}{4}\|\boldsymbol{\gamma}-\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{\beta}\|^2,\end{aligned}$$

后两个等式相加, 再用平行四边形法替代即得 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$.
(4) 第一变量保持数乘 先证明 $(m\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=m(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 对任意的正整数 m 成立. 对 m 进行归纳, $m=1$ 时结论显然成立. 假设 $<m$ 时结论成立, 则由引理 (iii) 及归纳假设可得

$$(m\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(m-2)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(m\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+((m-2)\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2((m-1)\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2(m-1)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

于是 $(m\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=m(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 成立. 在引理 (iii) 中令 $n=-m$, 可得 $(-m\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=-m(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, 结合引理 (i) 可知 $(m\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=m(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 对任意的整数 m 成立. 对非零整数 m, 上式中令 $\boldsymbol{\gamma}=m\boldsymbol{\alpha}$, 则有 $(\frac{1}{m}\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{m}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$. 进一步, 对任意有理数 $\frac{n}{m}$, $(\frac{n}{m}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{n}{m}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

对任意的实数 c, 存在一列有理数 $r_n \to c$. 由范数的三角不等式以及齐次性可得

$$\Big|\|c\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|-\|r_n\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\Big| \le \|(c-r_n)\boldsymbol{\alpha}\| = |c-r_n|\|\boldsymbol{\alpha}\| \to 0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|r_n\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| = \|c\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|$. 由此极限等式以及定义可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(r_n\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) &= \lim_{n\to\infty} r_n(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \\ &= \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4}\|r_n\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2 - \frac{1}{4}\|r_n\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2 + \frac{\mathrm{i}}{4}\|r_n\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2 - \frac{\mathrm{i}}{4}\|r_n\boldsymbol{\alpha}-\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2), \\ &= \frac{1}{4}\|c\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2 - \frac{1}{4}\|c\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2 + \frac{\mathrm{i}}{4}\|c\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2 - \frac{\mathrm{i}}{4}\|c\boldsymbol{\alpha}-\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\|^2 = (c\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\end{aligned}$$

即 $(c\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 对任意的实数 c 成立. 最后, 对任意的复数 $c+d\mathrm{i}$, 由引理 (ii) 可得

$$\big((c+d\mathrm{i})\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\big) = (c\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + (d\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + d\mathrm{i}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = (c+d\mathrm{i})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

综上所述, $(-,-)$ 是 V 上的复内积, 并且在正定性的证明中, 已经看到 $(-,-)$ 诱导的范数就是给定的范数 $\|\cdot\|$.

[问题 2018S14] 参考高代白皮书第 9 章解答题 17.

[问题 2018S15] 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是乘法可交换的实对称阵, 故由高代白皮书例 9.124 可知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可同时正交对角化, 即存在正交阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda_A} = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\quad \boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda_B} = \mathrm{diag}\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\},$$

其中特征值 λ_i,μ_i 为非零实数且 $\lambda_i+\mu_i \neq 0\,(1\le i\le n)$. 根据上述化简, 要证明结论成立, 只要证明 $(\boldsymbol{\Lambda_A}+\boldsymbol{\Lambda_B})^{-1} \neq \boldsymbol{\Lambda_A}^{-1}+\boldsymbol{\Lambda_B}^{-1}$ 成立, 这等价于证明 $(\lambda_i+\mu_i)^{-1} \neq \lambda_i^{-1}+\mu_i^{-1}\,(1\le i\le n)$ 成立, 而这由 $\lambda_i^2+\lambda_i\mu_i+\mu_i^2 = (\lambda_i+\frac{1}{2}\mu_i)^2+\frac{3}{4}\mu_i^2 > 0$ 即得.

[问题 2018S16] 参考高代白皮书例 9.58.

§ 1.10　18 级高等代数 I 每周一题

[问题 2018A01] 计算下列 $n+1$ 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n-1}n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

[问题 2018A02] 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 n 个复数, 满足:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=r, \\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2=r, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^n+\lambda_2^n+\cdots+\lambda_n^n=r, \\ \lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\cdots+\lambda_n^{n+1}=r, \end{cases}$$

其中 $r\in[0,n]$ 为整数. 请用 Vandermonde 行列式和 Cramer 法则证明: $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中有 r 个 1, $n-r$ 个 0.

[问题 2018A03] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵, b 为常数, 方阵 $\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b)$, 即 $\boldsymbol{B}$ 的每个元素都是 $\boldsymbol{A}$ 中对应元素加上 b.

(1) 证明: $\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式之和等于 $\boldsymbol{B}$ 的所有代数余子式之和;

(2) 进一步假设 $\boldsymbol{A}$ 是偶数阶反对称阵, 证明: $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

[问题 2018A04] 计算下列 n 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

[问题 2018A05] 设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}$ 为 n 维实列向量, 试构造 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 满足以下两个条件:

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$;

(2) 对任一满足 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\gamma} = 0$ 的 n 维列向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 均有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}$.

[问题 2018A06] 试求下列 $n\,(n \geq 2)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的秩, 其中:

(1) $a_{ij} = \cos(\alpha_i - \beta_j)$ (参考高代教材 [1] 第二章复习题 37);

(2) $a_{ij} = 1 + x_i y_j$ (参考高代教材 [1] 习题 2.7.1).

[问题 2018A07] 设 $V_1, \cdots, V_m, W$ 都是线性空间 V 的子空间, 满足

$$W \subseteq V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_m.$$

证明: 存在某个 $1 \leq i \leq m$, 使得 $W \subseteq V_i$.

[问题 2018A08] 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵, $\boldsymbol{C}$ 为 n 阶非异阵, 满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$. 证明: 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的通解为 $(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任意的 n 维列向量.

[问题 2018A09] 设 S 是线性空间 V 中的向量族, 并且至少包含一个非零向量. 证明: S 存在极大无关组的充分必要条件是 S 张成的子空间 $L(S)$ 是 V 的有限维子空间.

[问题 2018A10] 设 V, U 分别是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n, m 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}: V \to U$ 是两个线性映射, 证明: $\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi} \subseteq \operatorname{Im}\boldsymbol{\psi}$ 的充分必要条件是存在 V 上的线性变换 $\boldsymbol{\xi}$, 使得 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\xi}$.

[问题 2018A11] (1) 请用相抵标准型理论证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶幂等阵, 即 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 则 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{r}(\boldsymbol{A})$.

(2) 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $\boldsymbol{\varphi}^m = \boldsymbol{I}_V\ (m \geq 2)$, $W = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{I}_V - \boldsymbol{\varphi})$. 证明: 线性变换 $\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\boldsymbol{\varphi}^i$ 的迹等于 $\dim W$.

[问题 2018A12] 设循环矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix},$$

证明: 伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是循环矩阵.

[问题 2018A13] 设复系数多项式 $f(x), g(x)$ 互素, 证明: $f(x)^2+g(x)^2$ 的重根必为 $f'(x)^2+g'(x)^2$ 的根.

[问题 2018A14] 设 p 为奇素数, 证明: 多项式 $f(x)=(p-1)x^{p-2}+(p-2)x^{p-3}+\cdots+2x+1$ 在有理数域上不可约.

♣♣♣

§ 1.10 解答或提示

[问题 2018A01] 关于 $x, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的 Vandermonde 行列式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\prod_{k=1}^n(a_k-x),$$

于是

$$f'(x)=-\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\sum_{k=1}^n(a_1-x)\cdots(a_{k-1}-x)(a_{k+1}-x)\cdots(a_n-x).$$

再由行列式的求导公式 (高代白皮书例 1.21) 可得

$$|\boldsymbol{A}|=f'(-1)=-\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\sum_{k=1}^n(a_1+1)\cdots(a_{k-1}+1)(a_{k+1}+1)\cdots(a_n+1).$$

[问题 2018A02] 令 $\lambda_{n+1}=1$, 则可将原方程组整理为

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n-r\lambda_{n+1}=0, \\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2-r\lambda_{n+1}^2=0, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^n+\lambda_2^n+\cdots+\lambda_n^n-r\lambda_{n+1}^n=0, \\ \lambda_1^{n+1}+\lambda_2^{n+1}+\cdots+\lambda_n^{n+1}-r\lambda_{n+1}^{n+1}=0. \end{cases} \tag{1.10.1}$$

用反证法证明结论. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 并非是 r 个 1, $n-r$ 个 0, 则可在上述各方程中, 去掉取值为零的 λ_i; 再将取值相同的非零 λ_i 进行合并, 重数作为 λ_i^j 前面的系数; 最后

得到的方程组中 λ_i 的取值都非零且互不相同. 我们来看一种极端的情况, 就是原方程组 (1.10.1) 中 λ_i 的取值都非零且互不相同 (读者会发现在这种情况下, $n+1$ 次幂的方程是必要的). 此时, 下列齐次线性方程组有非零解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$, $x_{n+1}=-r$:

$$\begin{cases}\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n+\lambda_{n+1}x_{n+1}=0,\\ \lambda_1^2x_1+\lambda_2^2x_2+\cdots+\lambda_n^2x_n+\lambda_{n+1}^2x_{n+1}=0,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_1^nx_1+\lambda_2^nx_2+\cdots+\lambda_n^nx_n+\lambda_{n+1}^nx_{n+1}=0,\\ \lambda_1^{n+1}x_1+\lambda_2^{n+1}x_2+\cdots+\lambda_n^{n+1}x_n+\lambda_{n+1}^{n+1}x_{n+1}=0.\end{cases}\tag{1.10.2}$$

注意到方程组 (1.10.2) 的系数行列式等于 $\prod\limits_{1\le i<j\le n+1}(\lambda_j-\lambda_i)\prod\limits_{k=1}^{n+1}\lambda_k\neq 0$, 故由 Cramer 法则可知方程组 (1.10.2) 只有零解, 矛盾. 其余情况可完全类似地讨论, 那时只需要小于等于 n 次幂的方程即可. 另外, 也可用高代 II 中的 Newton 公式给出一个简洁的证明.

[问题 2018A03] (1) 若 $b=0$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, 结论显然成立. 下设 $b\neq 0$, 沿用高代白皮书例 1.22 的记号并由其结论可知,

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}(b)|=|\boldsymbol{A}|+b\sum_{i,j=1}^n A_{ij},\quad |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}(-b)|=|\boldsymbol{B}|-b\sum_{i,j=1}^n B_{ij},$$

其中 A_{ij},B_{ij} 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的代数余子式, 由上述两式即得 $\sum\limits_{i,j=1}^n A_{ij}=\sum\limits_{i,j=1}^n B_{ij}$.

(2) 由高代白皮书例 1.22 可知 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}(b)|=|\boldsymbol{A}|+b\sum\limits_{i,j=1}^n A_{ij}$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是偶数阶反对称阵, 故 A_{ii} 是奇数阶反对称行列式, 由高代白皮书例 1.43 可知 $A_{ii}=0\,(1\le i\le n)$. 对任意的 $1\le i<j\le n$, A_{ij} 的第 (k,l) 元素是 A_{ji} 的第 (l,k) 元素的相反数, 故 $A_{ij}=(-1)^{n-1}A_{ji}=-A_{ji}$. 于是 $\sum\limits_{i,j=1}^n A_{ij}=\sum\limits_{i=1}^n A_{ii}+\sum\limits_{1\le i<j\le n}(A_{ij}+A_{ji})=0$, 从而 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$.

[问题 2018A04] 注意到 $|\boldsymbol{A}|$ 的主对角元全为 x, 故记为 $D_n(x)$, 我们来求递推关系式. 第一步将第 i 列乘以 -1 加到第 $i-1$ 列上 $(i=2,\cdots,n)$; 第二步将第 $i-1$ 行加到第 i 行上 $(i=2,\cdots,n)$; 第三步是所得行列式按第 n 行进行展开:

$$D_n(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -x+n-1 & x-2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 2-n & -x+n-2 & x-3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-n+1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x+1 & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & x-1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-3 & x-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x+n-1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+n-1)D_{n-1}(x-1).$$

由此可得递推关系式 $D_n(x)=(x+n-1)D_{n-1}(x-1)$. 注意到 $D_1(x-n+1)=x-n+1$, 故不断递推下去可得 $|\boldsymbol{A}|=D_n(x)=(x+n-1)(x+n-3)\cdots(x-n+1)$. 若设

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

于是上述一系列的初等变换等价于相似变换 $\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

[问题 2018A05] 令 $\boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}-\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{I}_n$, 不难验证 $\boldsymbol{A}$ 满足题目条件.

[问题 2018A06] 由高代白皮书例 2.58 和例 2.52 可知, (1) 和 (2) 中的 $\boldsymbol{A}$ 都可以分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times 2$ 矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是 $2\times n$ 矩阵, 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leq 2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})\leq 2$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leq\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),\mathrm{r}(\boldsymbol{C})\}\leq 2$. 分情况讨论如下:

(i) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=0$.

(ii) 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$ 或 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=1$, 则 $1\leq\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leq\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),\mathrm{r}(\boldsymbol{C})\}=1$, 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$.

(iii) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$ 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=2$, 则由 Sylvester 不等式可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geq\mathrm{r}(\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{C})-2=2$, 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.

(1) 和 (2) 中的情况分类, 请读者按照上述方式自行写出具体的细节.

[问题 2018A07] 由假设可知

$$W=W\cap(V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_m)=(W\cap V_1)\cup(W\cap V_2)\cdots(W\cap V_m),$$

再由高代白皮书例 3.54 可知, 存在某个 $1\leq i\leq m$, 使得 $W=W\cap V_i$, 即 $W\subseteq V_i$.

[问题 2018A08] 设矩阵 $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 的列向量张成的子空间为 $U\subseteq\mathbb{K}^n$, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间为 $V_{\boldsymbol{A}}\subseteq\mathbb{K}^n$, 则由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ 可知 $U\subseteq V_{\boldsymbol{A}}$. 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 则 $\dim V_{\boldsymbol{A}}=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-r$, 于是 $\dim U\leq n-r$. 另一方面, 由矩阵秩的基本不等式可得 $\dim U=\mathrm{r}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\geq\mathrm{r}(\boldsymbol{C})-\mathrm{r}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\geq\mathrm{r}(\boldsymbol{C})-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-r$, 于是 $\dim U=n-r=\dim V_{\boldsymbol{A}}$, 从而 $V_{\boldsymbol{A}}=U$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任一解都是 $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合. 因此, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{K}^n$.

[问题 2018A09] 先证必要性. 若 S 存在极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$, 则 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 是 $L(S)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$ 的一组基, 从而 $\dim L(S)=r<\infty$. 再证充分性. 若 $\dim L(S)=r<\infty$, 则不妨设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r\}$ 是 $L(S)$ 的一组基. 设 $\boldsymbol{e}_i=c_{i1}\boldsymbol{\alpha}_{i1}+c_{i2}\boldsymbol{\alpha}_{i2}+\cdots+c_{in_i}\boldsymbol{\alpha}_{in_i}$, 其中 $c_{ij}\in\mathbb{K}$, $\boldsymbol{\alpha}_{ij}\in S\,(1\leq i\leq r,\,1\leq j\leq n_i)$. 令 $S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_{ij}\mid 1\leq i\leq r,\,1\leq j\leq n_i\}\subseteq S$, 则由线性组合的传递性可知 $L(S)=L(S_1)$. 注意到 S 至少包含一个非零向量, 故 S_1 也至少包含一个非零向量, 于是由高代教材命题 3.5.1 可知, 向量组 S_1 一定存在极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$, 容易验证这也是 S 的极大无关组.

注　我们可以利用选择公理或 Zorn 引理证明: 任一向量族都存在极大无关族, 以及任一线性空间都存在基, 其中只包含零向量的向量族的极大无关族以及零空间的基都约定为空集, 秩以及维数都约定为 0.

[问题 2018A10] 参考高代白皮书例 4.7.

[问题 2018A11] (1) 参考高代白皮书例 3.95 的推论.

(2) 设 $\boldsymbol{\psi}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\boldsymbol{\varphi}^i$, 则由 $\boldsymbol{\varphi}^m=\boldsymbol{I}_V$ 可知 $(\boldsymbol{I}_V-\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{0}$, 于是 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\psi}\subseteq\mathrm{Ker}(\boldsymbol{I}_V-\boldsymbol{\varphi})=$

W. 反之, 任取 $\boldsymbol{w} \in W$, 即 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$, 则 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\boldsymbol{\varphi}^i(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \in \operatorname{Im}\boldsymbol{\psi}$, 于是 $W \subseteq \operatorname{Im}\boldsymbol{\psi}$, 从而 $W = \operatorname{Im}\boldsymbol{\psi}$. 另一方面, 由 $(\boldsymbol{I}_V - \boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{0}$ 可得 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}$, 从而 $\boldsymbol{\varphi}^i\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}$, 于是 $\boldsymbol{\psi}^2 = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\boldsymbol{\varphi}^i\boldsymbol{\psi} = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}$, 即 $\boldsymbol{\psi}$ 是幂等线性变换. 再由 (1) 可得 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\psi}) = \operatorname{r}(\boldsymbol{\psi}) = \dim \operatorname{Im}\boldsymbol{\psi} = \dim W$.

[问题 2018A12] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/8848641.html 的推论 3.

[问题 2018A13] 设 $x = a$ 是 $f(x)^2 + g(x)^2 = (f(x) + \mathrm{i}g(x))(f(x) - \mathrm{i}g(x))$ 的重根, 先断言: $x = a$ 不是 $f(x) + \mathrm{i}g(x)$ 和 $f(x) - \mathrm{i}g(x)$ 的公共根. 用反证法, 若 $x = a$ 是公共根, 则有 $f(a) + \mathrm{i}g(a) = f(a) - \mathrm{i}g(a) = 0$, 于是 $f(a) = g(a) = 0$, 即 $x = a$ 必为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共根, 这与 $f(x), g(x)$ 互素相矛盾. 因此, $x = a$ 或者是 $f(x) + \mathrm{i}g(x)$ 的重根, 或者是 $f(x) - \mathrm{i}g(x)$ 的重根. 不妨设 $x = a$ 是 $f(x) + \mathrm{i}g(x)$ 的重根, 则 $f(a) + \mathrm{i}g(a) = f'(a) + \mathrm{i}g'(a) = 0$, 于是 $f'(a)^2 + g'(a)^2 = (f(a) + \mathrm{i}g(a))(f(a) - \mathrm{i}g(a)) = 0$, 即 $x = a$ 是 $f'(x)^2 + g'(x)^2$ 的根.

[问题 2018A14] 注意到

$$f(x) = (x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^p - 1}{x - 1}\right).$$

令 $x = y + 1$, 则有

$$\begin{aligned} f(x) = g(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{(y+1)^p - 1}{y}\right) \\ &= (y^{p-1} + \mathrm{C}_p^1 y^{p-2} + \cdots + \mathrm{C}_p^{p-3} y^2 + \mathrm{C}_p^{p-2} y + \mathrm{C}_p^{p-1})' \\ &= (p-1)y^{p-2} + (p-2)\mathrm{C}_p^1 y^{p-3} + \cdots + 2\mathrm{C}_p^{p-3} y + \mathrm{C}_p^{p-2}. \end{aligned}$$

由关于奇素数 p 的 Eisenstein 判别法可知 $g(y)$ 在有理数域上不可约, 从而 $f(x)$ 也在有理数域上不可约.

§ 1.11　18 级高等代数 II 每周一题

[问题 2019S01] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, 满足 $(\boldsymbol{A}')^m = \boldsymbol{A}^k$, 其中 m, k 是互异的正整数. 证明: $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或单位根.

[问题 2019S02] 设 V 为二维实线性空间, $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ 是 V 上两个非零线性变换, 满足 $\boldsymbol{\varphi\psi} + \boldsymbol{\psi\varphi} = \mathbf{0}$. 证明: 若 V 只有平凡的 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间, 则 V 必有非平凡的 $\boldsymbol{\psi}$–不变子空间.

[问题 2019S03] 设 $n\,(n \geq 2)$ 阶方阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a & a \\ b & 0 & a & \cdots & a & a \\ b & b & 0 & \cdots & a & a \\ b & b & b & \cdots & 0 & a \\ b & b & b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix},$$

其中 a, b 是复数, 试求 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件.

[问题 2019S04] 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 满足: $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{O}$.

(1) 若 $n = 2$, 证明: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$;

(2) 若 $n \geq 3$, 举例说明: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 不一定成立.

[问题 2019S05] 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵或具有相同行列分块方式的分块矩阵.

(1) 证明: 以下三种变换都是相似变换, 称为相似初等变换:

(1.1) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行, 再对换第 i 列与第 j 列;

(1.2) $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以非零常数 $c \in K$, 第 i 列乘以 c^{-1};

(1.3) $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以常数 $c \in K$ 加到第 j 行上, 第 j 列乘以 $-c$ 加到第 i 列上.

(2) 证明: 任一相似变换都是若干次相似初等变换的复合.

(3) 证明: 以下三种变换都是相似变换, 称为相似分块初等变换:

(3.1) 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行与第 j 分块行, 再对换第 i 分块列与第 j 分块列;

(3.2) $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行左乘非异阵 $\boldsymbol{M}$, 第 i 分块列右乘 $\boldsymbol{M}^{-1}$;

(3.3) $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行左乘矩阵 $\boldsymbol{M}$ 加到第 j 分块行上, 第 j 分块列右乘 $-\boldsymbol{M}$ 加到第 i 分块列上.

[问题 2019S06] 设 $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{B} \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, 分块阵 $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B})$

的秩为 r. 证明: 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}\in M_n(\mathbb{K})$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}\in M_r(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{B}_1\in M_{r\times m}(\mathbb{K})$.

[问题 2019S07] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是 n 阶复矩阵, 满足: $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$.

(1) 请用 Jordan 标准型理论证明: $\boldsymbol{C}$ 的特征值全为零;

(2) 设 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda),m_{\boldsymbol{B}}(\lambda)$ 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的极小多项式, $k=\min\{\deg m_{\boldsymbol{A}}(\lambda),\deg m_{\boldsymbol{B}}(\lambda),n-1\}$, 证明: $\boldsymbol{C}^k=\boldsymbol{O}$.

[问题 2019S08] 设 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: 对任意的正整数 k, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. 证明: 对任意的正整数 k, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^k$ 都相似.

[问题 2019S09] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, θ_0 是 $\cos x=x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 中的唯一解. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 θ_0, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\cos\boldsymbol{A}$.

[问题 2019S10] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶实对称阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 为半正定阵的充分必要条件是对任意的 n 阶半正定实对称阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, 都有 $\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}\geq 0$ 成立.

[问题 2019S11] 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个互异的正实数, t 为正实数, n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=(a_i+a_j)^{-t}$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 为正定阵.

[问题 2019S12] 设 V 为区间 $[-1,1]$ 上由次数不超过 3 的实系数多项式构成的实线性空间, V 上的内积定义为

$$(f,g)=\int_{-1}^{+1}f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

试求

$$\min_{f(x)\in V}\int_{-1}^{+1}(\mathrm{e}^x-f(x))^2\mathrm{d}x.$$

[问题 2019S13] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 n 阶实对称阵, 请用实对称阵的正交相似标准型理论证明:

$$\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^2\right)\leq\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{B}),$$

并求等号成立的充分必要条件.

[问题 2019S14] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正定实对称阵, 证明:

$$\frac{2^{n+1}}{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|}\le\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}+\frac{1}{|\boldsymbol{B}|},$$

且等号成立的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

[问题 2019S15] 设 V 是 n 维欧氏空间, 向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 满足如下条件: 若存在非负实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$, 使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$, 则必有 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$. 证明: 必存在向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 使得 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i)>0\,(1\le i\le m)$.

♣ ♣ ♣

§ 1.11 解答或提示

[问题 2019S01] 参考高代白皮书第 6 章解答题 5.

[问题 2019S02] 先证明: 二维实线性空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 有非平凡的不变子空间当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}$ 有实特征值. 事实上, $\boldsymbol{\varphi}$ 有非平凡的不变子空间, 即存在一维子空间 $L(\boldsymbol{e}_1)$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_1)\in L(\boldsymbol{e}_1)$, 这即当且仅当存在 $\lambda_1\in\mathbb{R}$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_1)=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$, 这也当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}$ 有实特征值 λ_1. 回到本题的条件: $\boldsymbol{\varphi}$ 只有平凡的不变子空间, 于是 $\boldsymbol{\varphi}$ 没有实特征值. 任取 V 中非零向量 $\boldsymbol{e}_1$, 则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_1)$ 必线性无关, 否则由高代白皮书例 3.8 可知, 存在实数 λ_1, 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_1)=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$, 矛盾. 令 $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_1)$, 则 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 是 V 的一组基. 设 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_2)=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a_1\\1&a_2\end{pmatrix}$, 其特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}|=\lambda^2-a_2\lambda-a_1$ 没有实根, 从而判别式 $a_2^2+4a_1<0$, 特别地, $a_1<0$. 设 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{e}_1)=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2$, 则 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_1)=-\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{e}_1)=-\boldsymbol{\varphi}(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)=-b_1\boldsymbol{e}_2-b_2(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2)=-a_1b_2\boldsymbol{e}_1-(a_2b_2+b_1)\boldsymbol{e}_2$, 于是 $\boldsymbol{\psi}$ 在这组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1&-a_1b_2\\b_2&-(a_2b_2+b_1)\end{pmatrix}$. 由 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$ 可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 经计算可得 $a_1a_2b_2=a_2(a_2b_2+b_1)=0$. 又 $a_1<0$, 故 $a_2b_1=a_2b_2=0$, 此时 $\boldsymbol{\psi}$ 的特征多项式 $g(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{B}|=\lambda^2-(b_1^2-a_1b_2^2)$. 注意到 $b_1^2-a_1b_2^2\ge 0$, 故 $\boldsymbol{\psi}$ 有实特征值, 于是 $\boldsymbol{\psi}$ 有非平凡的不变子空间.

注　利用有理标准型可直接得到 $\boldsymbol{\varphi}$ 在一组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a_1\\1&a_2\end{pmatrix}$. 也可

利用高代白皮书例 9.87 得到 $\boldsymbol{\varphi}$ 在一组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$, 再利用 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$ 得到 $\boldsymbol{\psi}$ 的表示矩阵满足的条件, 具体细节留给读者完成. 若本题不是在实数域上, 而是在有理数域上, 则结论不成立, 具体例子可参考 [问题 2017A15] (3).

[问题 2019S03] 参考高代白皮书例 6.6 以及第 328 页的注.

[问题 2019S04] 由 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}$ 经整理可得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$. 令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{CB}-\boldsymbol{BC}$. 由高代白皮书例 6.32 及其注可知 $\boldsymbol{C}^2$ 是幂零阵, 从而 $\boldsymbol{C}$ 也是幂零阵.

(1) 若 $n=2$, 则 $\boldsymbol{O}=\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$, 即有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(2) 若 $n\geq 3$, 则令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_{23}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{12}$, 则 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}_{23}^2-2\boldsymbol{E}_{23}\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{12}^2=\boldsymbol{O}$. 此时, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_{13}$, 两者不相等.

[问题 2019S05] 参考高代教材习题 4.3.10, 习题 4.3.11, 习题 4.3.12 及其解答.

[问题 2019S06] 参考高代白皮书例 6.96.

[问题 2019S07] 参考教学论文 [21] 的例 1 和命题 1.

[问题 2019S08] 设 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $\boldsymbol{A}^k$ 的全体特征值为 $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k$, 于是 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^k)=s_k=\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r\,(k\geq 1)$. 根据 [问题 2018A02] 或 Newton 公式经计算可得 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=1$, $\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$. 若在 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中, 存在特征值 0 的阶数大于 1 的 Jordan 块, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})>r$, 这与假设矛盾. 因此, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_1}(1),\cdots,\boldsymbol{J}_{r_k}(1),0,\cdots,0\}$, 由高代白皮书例 7.54 可知 $\boldsymbol{A}^k$ 的 Jordan 标准型也为 $\boldsymbol{J}$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^k\,(k\geq 1)$ 都相似. 最后的结论也可直接由 [问题 2014S09] 得到.

[问题 2019S09] 参考高代白皮书第 7 章解答题 14.

[问题 2019S10] 参考高代白皮书例 8.29 (2).

[问题 2019S11] 设 $V=C[0,+\infty)$ 为 $[0,+\infty)$ 区间上连续函数全体构成的实线性空间, 对任意的 $f(x),g(x)\in V$, 定义

$$(f(x),g(x))=\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)g(x)x^{t-1}\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x}.$$

容易验证上述 $(-,-)$ 满足对称性, 第一变量的线性以及正定性, 故 $(-,-)$ 成为 V 上的

内积, V 成为欧氏空间. 由高代白皮书第 3 章解答题 2 可知, $\mathrm{e}^{-a_1x},\mathrm{e}^{-a_2x},\cdots,\mathrm{e}^{-a_nx}$ 是 V 中 n 个线性无关的向量. 设 $g_{ij}=(\mathrm{e}^{-a_ix},\mathrm{e}^{-a_jx})$, 则由高代白皮书例 9.5 可知, 它们的 Gram 矩阵 $\boldsymbol{G}=(g_{ij})$ 必为正定实对称阵. 经如下计算, 其中第二步是用 $u=(a_i+a_j)x$ 进行变量代换, 可得:

$$g_{ij}=\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a_i+a_j)x}x^{t-1}\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x}=\frac{(a_i+a_j)^{-t}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}u^{t-1}\mathrm{d}u}{\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x}=(a_i+a_j)^{-t},$$

于是结论得证.

[问题 2019S12] 参考高代白皮书例 9.12.

[问题 2019S13] 设 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 为正交相似标准型. 考虑到问题的条件和结论在同时正交相似变换 $\boldsymbol{A}\mapsto\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{B}\mapsto\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{C}\mapsto\boldsymbol{P}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ 下不改变, 故不妨从一开始就假设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 为对角阵. 设 $\boldsymbol{BC}=(b_{ij})$, 则 $\boldsymbol{ABC}=(\lambda_ib_{ij})$, 于是

$$\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{ABC})^2\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(\lambda_ib_{ij})(\lambda_jb_{ji})=\sum_{i=1}^n\lambda_i^2b_{ii}^2+2\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_jb_{ij}b_{ji}.$$

又 $\boldsymbol{BC}^2\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{BC})(\boldsymbol{BC})'=(\sum\limits_{k=1}^n b_{ik}b_{jk})$, 故 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{BC}^2\boldsymbol{B}=(\lambda_i^2\sum\limits_{k=1}^n b_{ik}b_{jk})$, 于是

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{BC}^2\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\lambda_i^2b_{ik}^2=\sum_{i=1}^n\lambda_i^2b_{ii}^2+\sum_{1\le i<j\le n}(\lambda_i^2b_{ij}^2+\lambda_j^2b_{ji}^2).$$

因此

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{BC}^2\boldsymbol{B})-\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{ABC})^2\right)=\sum_{1\le i<j\le n}(\lambda_ib_{ij}-\lambda_jb_{ji})^2\ge 0,$$

等号成立当且仅当 $\lambda_ib_{ij}=\lambda_jb_{ji}\,(1\le i<j\le n)$, 这当且仅当 $\lambda_ib_{ij}=\lambda_jb_{ji}\,(1\le i,j\le n)$, 这也当且仅当 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{CBA}=(\boldsymbol{ABC})'$, 即当且仅当 $\boldsymbol{ABC}$ 为对称阵. 另外, 也可利用高代白皮书例 2.49 给出一个简洁的证明.

[问题 2019S14] 参考高代白皮书第 9 章解答题 14.

[问题 2019S15] 不妨设 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=V$, 并由保积同构不妨设 $V=\mathbb{R}^n$ (取标准内积). 设

$$C=C(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\{a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_m\boldsymbol{\alpha}_m\mid a_i\ge 0\,(1\le i\le m)\}$$

是由列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 张成的锥, 则由条件可知, C 是 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为锥点的凸多面体锥, 即 C 不包含 $\mathbb{R}^n$ 中任一超平面. 任取凸多面体锥 C 的一个面 F, 这是一个 $n-1$ 维的凸多面体锥, 不妨设 F 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 张成 (注: $F=C(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$ 是 C 的一个面的定义是: 整个 C 在超平面 $H=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$ 的一侧, 并且 $C\cap H=F$). 对超平面 H 而言, 存在法向量 $\boldsymbol{\beta}$, 使得 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i)=0\,(1\le i\le n-1)$, $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)>0\,(n\le j\le m)$ (事实上, $\boldsymbol{\beta}$ 是线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系). 对凸多面体锥 C 的维数 n 进行归纳. $n=1$ 时结论显然成立, 设维数小于 n 时结论成立, 现证 n 维的情形. 由于 $F=C(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$ 是一个 $n-1$ 维凸多面体锥, 故由归纳假设, 存在 $\boldsymbol{\gamma}\in H$, 使得 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_i)>0\,(1\le i\le n-1)$. 令 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+t\boldsymbol{\gamma}$, 其中 t 是充分小的正实数, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 必满足:

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i)=t(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_i)>0\ (1\le i\le n-1),\quad (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j)+t(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_j)>0\ (n\le j\le m).$$

因此, 上述 $\boldsymbol{\alpha}$ 就是要求的向量.

§ 1.12　19 级高等代数 I 每周一题

[问题 2019A01] 请用高代教材第一章中的方法求出下列 n 阶行列式的值:

(1) $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 2a_2 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 2a_n \end{vmatrix}$,

(2) $|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

[问题 2019A02] 设 2019 阶行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{2018} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{2018} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2019} & x_{2019}^2 & \cdots & x_{2019}^{2018} \end{vmatrix}.$$

设 $|\boldsymbol{A}|$ 的代数余子式分别为 $A_{ij}\,(1 \le i, j \le 2019)$, 试求 $\sum\limits_{i,j=1}^{2019}(x_i^{2019} + j^{70})A_{ij}$.

[问题 2019A03] 有限集合 T 到自身上的一个双射 (即既单又满的映射) 称为 T 上的一个置换 (Permutation), 集合 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的全体置换构成的集合记为 S_n. 对任一 $\sigma \in S_n$, $(\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$ 是 S 的一个全排列; 反之, 对 S 的任一全排列 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$, 定义 $\sigma(i) = k_i\,(1 \le i \le n)$, 则 σ 是 S 的一个置换. 因此, 我们可以把 S 的置换和全排列等同起来.

设 $\sigma, \tau \in S_n$, τ 与 σ 的乘积 $\tau\sigma$ 定义为映射的复合: $\tau\sigma(i) = \tau(\sigma(i))\,(1 \le i \le n)$, 容易验证 $\tau\sigma \in S_n$ 且乘法满足结合律. 设 $e : S \to S$ 为恒等映射, 即 $e(i) = i\,(1 \le i \le n)$, 则 $e \in S_n$. 因为 $\sigma : S \to S$ 是双射, 故其逆映射 $\sigma^{-1} : S \to S$ 也是双射, 即 $\sigma^{-1} \in S_n$, 并且满足 $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = e$ (以上事实说明: n 阶置换全体 S_n 构成一个群, 称为 n 阶对称群).

设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是 n 维标准单位列向量, $\sigma \in S_n$, 定义矩阵

$$\boldsymbol{P}_\sigma = (\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{e}_{\sigma(2)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}),$$

称为相伴于置换 σ 的 n 阶置换矩阵. 置换矩阵的等价定义是: n 阶方阵 $\boldsymbol{P}$ 的每行和每列只有一个元素非零, 并且那些非零元素都等于 1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, $\sigma, \tau \in S_n$, 证明以下结论 (第 3 小问说明: n 阶置换矩阵全体 $\mathcal{P}_n$ 构成一个群, 它是 n 阶正交群 $O(n)$ 的子群, 并且 $\boldsymbol{P}: S_n \to \mathcal{P}_n$, $\sigma \mapsto \boldsymbol{P}_\sigma$, 是一个群同构):

(1) 第一类初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{ij}$ (高代教材定义 2.4.4), 基础循环矩阵 $\boldsymbol{J}$ (高代白皮书例 2.1) 和反单位阵 (反对角线上的元素全为 1, 其余元素全为 0 的矩阵) 都是置换矩阵.

(2) $|\boldsymbol{P}_\sigma| = (-1)^{N(\sigma)}$, 其中 $N(\sigma)$ 是 σ 作为全排列的逆序数.

(3) $\boldsymbol{P}_{\tau\sigma} = \boldsymbol{P}_\tau \boldsymbol{P}_\sigma$, $\boldsymbol{P}_e = \boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{P}_{\sigma^{-1}} = \boldsymbol{P}_\sigma^{-1} = \boldsymbol{P}_\sigma'$.

(4) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma$ 的列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的一个置换, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma$ 的第 i 列是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $\sigma(i)$ 列; $\boldsymbol{P}_\sigma'\boldsymbol{A}$ 的行向量是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量的一个置换, 即 $\boldsymbol{P}_\sigma'\boldsymbol{A}$ 的第 i 行是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $\sigma(i)$ 行.

[问题 2019A04] 试求

(1) 与全体循环矩阵 (高代白皮书例 2.14) 都乘法可交换的所有的 n 阶方阵.

(2) 与全体置换矩阵 $\{\boldsymbol{P}_\sigma, \sigma \in S_n\}$ 都乘法可交换的所有的 n 阶方阵.

[问题 2019A05] 求下列 n 阶方阵的行列式 (第四行的 $\cdots$ 表示平移, 其余空白处元素都为零):

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & 2ab & b^2 & & & & & & \\ 2ac & a^2+2bc & 2ab & b^2 & & & & & \\ c^2 & 2ac & a^2+2bc & 2ab & b^2 & & & & \\ & & & & \cdots & & & & \\ & & & & c^2 & 2ac & a^2+2bc & 2ab & b^2 \\ & & & & & c^2 & 2ac & a^2+2bc & 2ab \\ & & & & & & c^2 & 2ac & a^2+bc \end{pmatrix}.$$

[问题 2019A06] 证明: n 阶非异阵 $\boldsymbol{A}$ 仅通过第三类初等行变换就可变为对角阵

$$\mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, |\boldsymbol{A}|\}.$$

[问题 2019A07] 设循环矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 请用高代白皮书例 2.56 的结论计算 $|\boldsymbol{A}|$, 并与高代白皮书例 1.12 的结果进行比较.

(2) 设 A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式, 求 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}$.

[问题 2019A08] (1) 请用摄动法和初等变换法证明: n 阶上三角阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是上三角阵.

(2) 请用高代教材的习题 3.4.7 证明高代教材的命题 3.5.1.

(3) 请用形式行向量和相抵标准型理论证明高代教材的引理 3.5.1.

[问题 2019A09] 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 2 阶方阵, 试求 $C(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{X}\in M_2(\mathbb{K})\mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\}$.

[问题 2019A10] 求下列数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V_1,V_2,V_3 的维数和一组基 (表示为基础矩阵的线性组合):

(1) $V_1=\{\boldsymbol{X}\in M_{2n}(\mathbb{K})\mid \boldsymbol{X}'\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}\}$, 其中 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$;

(2) $V_2=\{\boldsymbol{X}\in M_{2n+1}(\mathbb{K})\mid \boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}\}$, 其中 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$;

(3) $V_3=\{\boldsymbol{X}\in M_{2n}(\mathbb{K})\mid \boldsymbol{X}'\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}\}$, 其中 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

[问题 2019A11] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\,(n\geq 3)$ 阶可逆实对称阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶主子式都是零. 证明: $\boldsymbol{A}$ 必有一个非零的 $n-2$ 阶主子式, 且所有非零的 $n-2$ 阶主子式都与 $|\boldsymbol{A}|$ 反号.

[问题 2019A12] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为数域 $\mathbb{K}$ 上的 $m\times n$ 阶矩阵, 线性映射 $\boldsymbol{\varphi}: M_{n\times m}(\mathbb{K})\to M_{m\times n}(\mathbb{K})$ 定义为 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AXB}$.

(1) 证明: 若 $m \neq n$, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 不是线性同构;

(2) 试求 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}$ 的维数和一组基.

[问题 2019A13] (1) 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{f}: V \to \mathbb{K}$ 是线性函数, $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in V$. 定义映射 $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}: V \to V$ 为 $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{v}$, 证明: $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}$ 是 V 上的线性变换 (称为初等线性变换).

(2) 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明: $\boldsymbol{\varphi}$ 是可逆初等线性变换的充分必要条件是 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 V 的某组基下的表示矩阵是初等阵.

[问题 2019A14] 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 满足 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = 0$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 相似于一个主对角元全为 0 的矩阵.

♣ ♣ ♣

§ 1.12 解答或提示

[问题 2019A01] 参考高代白皮书例 1.33 的解法 2 (第 38 页).

[问题 2019A02] 将求和分成两个部分分别来计算 $\sum\limits_{i,j=1}^{2019}(x_i^{2019}+j^{70})A_{ij} = \sum\limits_{i,j=1}^{2019} x_i^{2019}A_{ij} + \sum\limits_{i,j=1}^{2019} j^{70}A_{ij}$. 由高代白皮书例 1.22 的推论可知

$$\sum_{i,j=1}^{2019} j^{70}A_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & x_1+2^{70} & x_1^2+3^{70} & \cdots & x_1^{2018}+2019^{70} \\ 2 & x_2+2^{70} & x_2^2+3^{70} & \cdots & x_2^{2018}+2019^{70} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & x_{2019}+2^{70} & x_{2019}^2+3^{70} & \cdots & x_{2019}^{2018}+2019^{70} \end{vmatrix} - |\boldsymbol{A}|.$$

计算上式右边第一个行列式: 利用第一列消去第 j 列的常数项 j^{70}, 再将第一列的公因子 2 提出, 可得行列式的值为 $2|\boldsymbol{A}|$, 于是第二部分的值等于 $|\boldsymbol{A}| = \prod\limits_{1\le i<j\le 2019}(x_j - x_i)$. 由高代白皮书例 1.22 的推论 (转置版本) 可知

$$\sum_{i,j=1}^{2019} x_i^{2019}A_{ij} = \begin{vmatrix} 1+x_1^{2019} & x_1+x_1^{2019} & \cdots & x_1^{2018}+x_1^{2019} \\ 1+x_2^{2019} & x_2+x_2^{2019} & \cdots & x_2^{2018}+x_2^{2019} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_{2019}^{2019} & x_{2019}+x_{2019}^{2019} & \cdots & x_{2019}^{2018}+x_{2019}^{2019} \end{vmatrix} - |\boldsymbol{A}|.$$

计算上式右边第一个行列式: 最右边增加一列 $(x_1^{2019}, x_2^{2019}, \cdots, x_{2019}^{2019})'$, 最下面增加一行 $(0, 0, \cdots, 0, 1)$, 再用新行列式的最后一列消去前面各列中的 x_j^{2019} 次项, 最后将最后一行拆分为 $(-1, -1, \cdots, -1, -1) + (0, 0, \cdots, 0, 2)$, 可得

$$\begin{vmatrix} 1+x_1^{2019} & x_1+x_1^{2019} & \cdots & x_1^{2018}+x_1^{2019} & x_1^{2019} \\ 1+x_2^{2019} & x_2+x_2^{2019} & \cdots & x_2^{2018}+x_2^{2019} & x_2^{2019} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1+x_{2019}^{2019} & x_{2019}+x_{2019}^{2019} & \cdots & x_{2019}^{2018}+x_{2019}^{2019} & x_{2019}^{2019} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{2018} & x_1^{2019} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{2018} & x_2^{2019} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2019} & \cdots & x_{2019}^{2018} & x_{2019}^{2019} \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{2018} & x_1^{2019} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{2018} & x_2^{2019} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2019} & \cdots & x_{2019}^{2018} & x_{2019}^{2019} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2|\boldsymbol{A}|.$$

于是第一部分的值 $\sum\limits_{i,j=1}^{2019} x_i^{2019} A_{ij} = -\prod\limits_{1 \le i < j \le 2019} (x_j - x_i) \prod\limits_{k=1}^{2019} (1 - x_k) + \prod\limits_{1 \le i < j \le 2019} (x_j - x_i)$. 因此 $\sum\limits_{i,j=1}^{2019} (x_i^{2019} + j^{70}) A_{ij} = \Big(2 + \prod\limits_{k=1}^{2019} (x_k - 1)\Big) \prod\limits_{1 \le i < j \le 2019} (x_j - x_i)$.

[问题 2019A03] (1) 显然成立. (2) 由行列式的组合定义即得.

(3) 由置换矩阵的定义可知 $\boldsymbol{P}_\sigma$ 的第 i 列是 $\boldsymbol{e}_{\sigma(i)}$, 即 $\boldsymbol{P}_\sigma \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_{\sigma(i)}\,(1 \le i \le n)$ 成立. 于是 $\boldsymbol{P}_{\tau\sigma} \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_{\tau\sigma(i)}$, $\boldsymbol{P}_\tau \boldsymbol{P}_\sigma \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{P}_\tau \boldsymbol{e}_{\sigma(i)} = \boldsymbol{e}_{\tau\sigma(i)}$, 即 $\boldsymbol{P}_{\tau\sigma} \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{P}_\tau \boldsymbol{P}_\sigma \boldsymbol{e}_i\,(1 \le i \le n)$ 成立, 从而 $\boldsymbol{P}_{\tau\sigma} = \boldsymbol{P}_\tau \boldsymbol{P}_\sigma$. $\boldsymbol{P}_e = \boldsymbol{I}_n$ 是显然的. 在上式中令 $\tau = \sigma^{-1}$ 可得 $\boldsymbol{P}_{\sigma^{-1}} \boldsymbol{P}_\sigma = \boldsymbol{P}_e = \boldsymbol{I}_n$, 于是 $\boldsymbol{P}_{\sigma^{-1}} = \boldsymbol{P}_\sigma^{-1}$. 由 $\boldsymbol{e}_i' \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ 可得 $\boldsymbol{P}_\sigma' \boldsymbol{P}_\sigma = \boldsymbol{I}_n$, 于是 $\boldsymbol{P}_\sigma' = \boldsymbol{P}_\sigma^{-1}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列分块, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\alpha}_i\,(1 \le i \le n)$ 成立. 于是

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{\sigma(i)}=\boldsymbol{\alpha}_{\sigma(i)}\,(1\leq i\leq n)$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma$ 的第 i 列是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $\sigma(i)$ 列, 因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\sigma$ 的列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的一个置换. 注意到 $\boldsymbol{P}_\sigma'\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}_\sigma)'$, 故行向量置换的结论可由列向量置换的结论得到.

[问题 2019A04] (1) 由高代白皮书例 2.1 和例 2.14 可知, 任一循环矩阵都可表示为基础循环矩阵的多项式. 因此, n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与所有的循环矩阵乘法可交换等价于与基础循环矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_{n-1}\\1&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 乘法可交换, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}$, 经计算可得

$$\begin{pmatrix}a_{1n}&a_{11}&\cdots&a_{1,n-2}&a_{1,n-1}\\a_{2n}&a_{21}&\cdots&a_{2,n-2}&a_{2,n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n-1,n}&a_{n-1,1}&\cdots&a_{n-1,n-2}&a_{n-1,n-1}\\a_{nn}&a_{n1}&\cdots&a_{n,n-2}&a_{n,n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3,n-1}&a_{3n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\\a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\end{pmatrix}.$$

比较元素可得 $a_{ij}=a_{i+1,j+1}\,(1\leq i,j\leq n)$, 其中约定若指标大于 n, 则自动变成模 n 的余数, 上式即 $\boldsymbol{A}$ 为循环矩阵. 因此, 与所有循环矩阵乘法可交换的 n 阶方阵为循环矩阵.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与全体置换矩阵 $\mathcal{P}_n=\{\boldsymbol{P}_\sigma,\,\sigma\in S_n\}$ 乘法可交换, 则由基础循环矩阵 $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}_n$ 可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}$, 再由 (1) 可知 $\boldsymbol{A}$ 为循环矩阵. 由初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{12}\in\mathcal{P}_n$ 可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{12}=\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{A}$, 经计算可得 $\boldsymbol{A}$ 的非主对角元全相等, 于是 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{I}_n+b\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 是元素全为 1 的 n 阶矩阵. 反之, 容易验证 $\boldsymbol{I}_n$ 和上面的 $\boldsymbol{B}$ 满足: $\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{P}_\sigma=\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{P}_\sigma$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_\sigma=\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}$, 于是任一形如 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{I}_n+b\boldsymbol{B}$ 的矩阵必与全体置换矩阵乘法可交换. 因此, 与全体置换矩阵乘法可交换的 n 阶方阵为 $\boldsymbol{A}=(a\delta_{ij}+b)$, 其中 $a,b\in\mathbb{K}$.

[问题 2019A05] 设题目中的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 下列矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为三对角矩阵:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b&&\\c&a&\ddots&\\&\ddots&\ddots&b\\&&c&a\end{pmatrix},$$

则容易验证 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$. 于是 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|^2$, 其中 $|\boldsymbol{B}|$ 的表达式请参考高代白皮书例 1.14.

[问题 2019A06] 由高代白皮书例 2.31 可知, 任一非异阵 $\boldsymbol{A}$ 仅通过第三类初等变换可变成对角阵 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,|\boldsymbol{A}|\}$. 考虑非异阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_n(|\boldsymbol{A}|^{-1})$, 其行列式值为 1, 故存在第三

类初等阵 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_r,\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_s$, 使得

$$\boldsymbol{P}_r\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_n(|\boldsymbol{A}|^{-1})\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_s=\boldsymbol{I}_n.$$

上式说明 $\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_s$ 是 $\boldsymbol{P}_r\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_n(|\boldsymbol{A}|^{-1})$ 的逆阵, 于是

$$\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{P}_r\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_n(|\boldsymbol{A}|^{-1})=\boldsymbol{I}_n,$$

从而

$$\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{P}_r\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_n(|\boldsymbol{A}|)=\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,|\boldsymbol{A}|\},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 仅通过第三类初等行变换可变成对角阵 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,|\boldsymbol{A}|\}$.

[问题 2019A07] (1) 参考高代教材习题 2.5.7. (2) 这是 [19 级高代 I 期末 06] 的特例.

[问题 2019A08] (1) 先设上三角阵 $\boldsymbol{A}$ 是非异阵, 利用初等行变换可求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{I}_n)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & \cdots & * & 1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ & & a_n & & & 1\end{array}\right)\to(\boldsymbol{I}_n\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1})=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & a_1^{-1} & \cdots & * \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & & & a_n^{-1}\end{array}\right),$$

于是

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\prod\limits_{i\neq 1}a_i & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \prod\limits_{i\neq n}a_i\end{pmatrix}$$

也是上三角阵. 对一般的上三角阵 $\boldsymbol{A}$, 存在一列有理数 $t_k\to 0$, 使得 $\boldsymbol{A}+t_k\boldsymbol{I}_n$ 均为非异上三角阵, 于是由前面的讨论可得

$$(\boldsymbol{A}+t_k\boldsymbol{I}_n)^*=\begin{pmatrix}\prod\limits_{i\neq 1}(a_i+t_k) & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \prod\limits_{i\neq n}(a_i+t_k)\end{pmatrix}.$$

上式两边矩阵的元素都是关于 t_k 的多项式, 从而关于 t_k 连续, 令 $t_k \to 0$ 可得

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \prod\limits_{i\neq 1} a_i & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & \prod\limits_{i\neq n} a_i \end{pmatrix}$$

也是上三角阵. 本小题的直接证法可参考高代白皮书例 2.8.

(2) 设 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 由 n 个向量组成, 我们利用逐步扩张的办法来构造 S 的极大无关组 B. 首先将非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 加入向量组 B 中, 此时 $B = \{\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 中向量线性无关. 由高代白皮书例 3.8 可知, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 或者与 B 中向量线性无关, 或者是 B 中向量的线性组合. 若 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 B 中向量线性无关, 则加入向量组 B 中, 此时 $B = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ 中向量线性无关; 若 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 B 中向量的线性组合, 则不对向量组 B 做任何添加. 依次这样考虑 $\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 最后可得线性无关向量组 B, 且 S 中任一向量都是 B 中向量的线性组合, 即 B 是 S 的极大无关组.

(3) 设 $A = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$, $B = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$, A 中任一向量都是 B 中向量的线性组合, 并且 $r > s$, 我们来证明: A 中向量线性相关. 将 A, B 中向量都写成形式行向量, 则可得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{M}, \tag{1.12.1}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 是一个 $s \times r$ 矩阵. 设 $\boldsymbol{P}$ 为 s 阶非异阵, $\boldsymbol{Q}$ 为 r 阶非异阵, 使得 $\boldsymbol{PMQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 其中 $k \leq \min\{s, r\} < r$. 令 $\boldsymbol{e}_r = (0, \cdots, 0, 1)'$, 则 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_r = (c_1, c_2, \cdots, c_r)'$ 为 r 维非零列向量, 且 $\boldsymbol{PM\gamma} = \boldsymbol{PMQ}\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{M\gamma} = \boldsymbol{0}$. 在 (1.12.1) 式两边同时右乘 $\boldsymbol{\gamma}$, 可得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{M\gamma} = \boldsymbol{0},$$

即有 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{0}$, 因此 A 中向量线性相关.

[问题 2019A09] 分以下两种情况进行讨论.

(1) 若对任意的非零列向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}^2$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}$ 都线性相关, 则由高代白皮书例 3.8 可知, 存在 $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, 使得 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}$. 例如, 对 $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)'$, $\boldsymbol{e}_2 = (0.1)'$, 存在 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 = \lambda_1\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{A\alpha}_2 = \lambda_2\boldsymbol{e}_2$, 于是 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$. 再考虑 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, 则由 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}$ 可得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, 于是 $\boldsymbol{A} = \lambda_0\boldsymbol{I}_2$ 为纯量阵, 此时 $C(\boldsymbol{A}) = M_2(\mathbb{K})$.

(2) 若存在某个非零列向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}^2$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}$ 线性无关, 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}) \in M_2(\mathbb{K})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 非异并且

$$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}) = (\boldsymbol{AA}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$. 任取 $\boldsymbol{B} \in C(\boldsymbol{A})$, 即 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 于是 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}) = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})$. 若设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, 则由上述等式可得 $b_{12} = a_1 b_{21}$, $b_{22} = b_{11} + a_2 b_{21}$, 于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP} = \begin{pmatrix} b_{11} & a_1 b_{21} \\ b_{21} & b_{11} + a_2 b_{21} \end{pmatrix} = b_{11}\boldsymbol{I}_2 + b_{21} \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}(b_{11}\boldsymbol{I}_2 + b_{21}\boldsymbol{A})\boldsymbol{P},$$

从而 $\boldsymbol{B} = b_{11}\boldsymbol{I}_2 + b_{21}\boldsymbol{A}$. 又任一 $b_{11}\boldsymbol{I}_2 + b_{21}\boldsymbol{A}$ 显然属于 $C(\boldsymbol{A})$, 因此 $C(\boldsymbol{A}) = L(\boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{A})$. 本题高代 II 的解法请参考高代白皮书例 7.28.

[问题 2019A10] (1) 设 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \in V_1$, 其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 都是 n 阶方阵, 代入 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{J} + \boldsymbol{JX} = \boldsymbol{O}$ 可得

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{C}' & \boldsymbol{A}' \\ -\boldsymbol{D}' & \boldsymbol{B}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ -\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{D} \\ -(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}') & \boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \boldsymbol{O},$$

于是 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{A}'$. 容易验证 $S = \{\boldsymbol{E}_{ij} - \boldsymbol{E}_{n+j,n+i}\,(1 \le i, j \le n)$; $\boldsymbol{E}_{i,i+n}\,(1 \le i \le n)$, $\boldsymbol{E}_{i,j+n} + \boldsymbol{E}_{j,i+n}\,(1 \le i < j \le n)$; $\boldsymbol{E}_{i+n,i}\,(1 \le i \le n)$, $\boldsymbol{E}_{i+n,j} + \boldsymbol{E}_{j+n,i}\,(1 \le i, j \le n)\}$ 是 V_1 的一组基, 于是 $\dim V_1 = 2n^2 + n$.

(2) 设 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \in V_2$, 其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 都是 n 阶方阵, $a \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{K}^n$, $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{K}_n$, 代入 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M} + \boldsymbol{MX} = \boldsymbol{O}$ 可得

$$\begin{pmatrix} a & \boldsymbol{\beta}' & \boldsymbol{\alpha}' \\ \boldsymbol{\gamma}' & \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{A}' \\ \boldsymbol{\delta}' & \boldsymbol{D}' & \boldsymbol{B}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & \boldsymbol{\beta}' + \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\gamma}' + \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{\delta}' + \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{A} + \boldsymbol{D}' & \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}' \end{pmatrix} = \boldsymbol{O},$$

于是 $a=0$, $\boldsymbol{\gamma}=-\boldsymbol{\beta}'$, $\boldsymbol{\delta}=-\boldsymbol{\alpha}'$, $\boldsymbol{B}'=-\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}'=-\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{A}'$. 容易验证 $S=\{\boldsymbol{E}_{i+1,1}-\boldsymbol{E}_{1,i+n+1}\,(1\leq i\leq n);\ \boldsymbol{E}_{i+n+1,1}-\boldsymbol{E}_{1,i+1}\,(1\leq i\leq n);\ \boldsymbol{E}_{i+1,j+1}-\boldsymbol{E}_{j+n+1,i+n+1}\,(1\leq i,j\leq n);\ \boldsymbol{E}_{i+1,j+n+1}-\boldsymbol{E}_{j+1,i+n+1}\,(1\leq i<j\leq n);\ \boldsymbol{E}_{i+n+1,j+1}-\boldsymbol{E}_{j+n+1,i+1}\,(1\leq i<j\leq n)\}$ 是 V_2 的一组基, 于是 $\dim V_2=2n^2+n$.

(3) 设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\in V_3$, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 n 阶方阵, 代入 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}'&\boldsymbol{A}'\\\boldsymbol{D}'&\boldsymbol{B}'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}'&\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}'&\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}'\end{pmatrix}=\boldsymbol{O},$$

于是 $\boldsymbol{B}'=-\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}'=-\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{A}'$. 容易验证 $S=\{\boldsymbol{E}_{i,j+n}-\boldsymbol{E}_{j,i+n}\,(1\leq i<j\leq n);\ \boldsymbol{E}_{i+n,j}-\boldsymbol{E}_{j+n,i}\,(1\leq i<j\leq n);\ \boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{j+n,i+n}\,(1\leq i,j\leq n)\}$ 是 V_3 的一组基, 于是 $\dim V_3=2n^2-n$.

[问题 2019A11] 第一个结论用反证法证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-2$ 阶主子式全为零, 更一般地, 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 有一个非零的 $r\,(r<n-2)$ 阶主子式, 但所有的 $r+1,\cdots,n-2,n-1$ 阶主子式全为零, 则由高代白皮书第 3 章解答题 10 可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 这与 $\boldsymbol{A}$ 可逆矛盾! 第二个结论利用高代白皮书第 3 章解答题 10 完全类似的讨论来证明. 任取 $\boldsymbol{A}$ 的一个非零 $n-2$ 阶主子式 $|\boldsymbol{M}|$, 经过对称的行列对换, 不妨假设 $\boldsymbol{M}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-2$ 行和列构成的主子阵, 即有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}&\boldsymbol{\alpha}&\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{\alpha}'&a&b\\\boldsymbol{\beta}'&b&c\end{pmatrix}.$$

由于 $|\boldsymbol{M}|\neq 0$, 故可将第一分块行左乘 $-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{M}^{-1}$ 加到第二分块行, 再将第一分块行左乘 $-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{M}^{-1}$ 加到第三分块行, 注意到第三类分块初等变换不改变行列式的值, 从而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{M}&\boldsymbol{\alpha}&\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{0}&a-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\alpha}&b-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{0}&b-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\alpha}&c-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\beta}\end{vmatrix}. \tag{1.12.2}$$

因为 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{M}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}'&a\end{vmatrix}=0$, 故可得 $a-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=0$, 同理可得 $c-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\beta}$. 又 $b-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\beta}=$

$b-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$, 故由 (1.12.2) 式可知 $|\boldsymbol{A}|=-(b-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\beta})^2|\boldsymbol{M}|\neq 0$, 于是 $b-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\beta}\neq 0$, 从而 $(b-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\beta})^2>0$, 因此 $|\boldsymbol{M}|$ 与 $|\boldsymbol{A}|$ 反号.

[问题 2019A12] (1) 若 $m\neq n$, 不妨设 $m>n$, 则线性方程组 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 解空间的维数等于 $m-\mathrm{r}(\boldsymbol{B}')\geq m-\min\{n,m\}=m-n>0$, 即存在 m 维非零列向量 $\boldsymbol{\beta}$, 使得 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$. 任取 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\neq\boldsymbol{O}$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{X}\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}$, 从而 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}\neq 0$, 于是 $\boldsymbol{\varphi}$ 不是线性同构.

(2) 设 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ 是 m 阶非异阵, $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$ 是 n 阶非异阵, 使得 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 其中 $r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, $s=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 任取 $\boldsymbol{X}\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}$, 设 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11}&\boldsymbol{X}_{12}\\\boldsymbol{X}_{21}&\boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{X}_{11}$ 是 $r\times s$ 矩阵. 由 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 可得

$$(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1)(\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}_2^{-1})(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2)=\boldsymbol{O},$$

即有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11}&\boldsymbol{X}_{12}\\\boldsymbol{X}_{21}&\boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_s&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O},$$

于是 $\boldsymbol{X}_{11}=\boldsymbol{O}$, 从而 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}=\left\{\boldsymbol{Q}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}_{r\times s}&\boldsymbol{X}_{12}\\\boldsymbol{X}_{21}&\boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}_2\right\}$. 因此, $\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}$ 的一组基为 $\{\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{P}_2\mid 1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m,\ (i,j)\notin[1,r]\times[1,s]\}$, 于是 $\dim\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}=mn-rs$.

[问题 2019A13] (1) 直接验证 $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}$ 保持加法和数乘即可, 过程从略.

(2) 先证充分性. 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 下的表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为初等阵, 下分三种情况进行讨论.

(S1) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_{ij}$ 为第一类初等阵, 则由定义可得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_k)=\boldsymbol{e}_k\,(k\neq i,j)$, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{e}_i$. 定义线性函数 $\boldsymbol{f}:V\to\mathbb{K}$ 满足: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_k)=0\,(k\neq i,j)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i)=-1$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_j)=1$, 令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j$, 则容易验证 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}$ 成立.

(S2) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_i(c)$ 为第二类初等阵, 其中 $c\neq 0$, 则由定义可得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_k)=\boldsymbol{e}_k\,(k\neq i)$, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_i)=c\boldsymbol{e}_i$. 定义线性函数 $\boldsymbol{f}:V\to\mathbb{K}$ 满足: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_k)=0\,(k\neq i)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i)=c-1$, 令

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_i$, 则容易验证 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}$ 成立.

(S3) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}_{ij}(c)$ 为第三类初等阵, 则由定义可得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_k)=\boldsymbol{e}_k\,(k\neq i)$, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_i+c\boldsymbol{e}_j$, 定义线性函数 $\boldsymbol{f}:V\to\mathbb{K}$ 满足: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_k)=0\,(k\neq i)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_i)=c$, 令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_j$, 则容易验证 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}$ 成立.

再证必要性. 下分两种情况进行讨论.

(N1) 若 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{I}_V$, 结论显然成立.

(N2) 若 $\boldsymbol{f}\neq\boldsymbol{0}$, 则由线性映射的维数公式可知 $\dim\operatorname{Ker}\boldsymbol{f}=n-1$. 再分两种情况讨论.

(N2.1) 若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})\neq 0$, 任取 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{f}$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 则 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一组基. 经计算可得 $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{v}=(1+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_i\,(i\geq 2)$, 于是可逆初等线性变换 $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}$ 在这组基下的表示矩阵为第二类初等阵 $\boldsymbol{P}_1(1+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}))$.

(N2.2) 若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})=0$, 则 $\boldsymbol{v}\in\operatorname{Ker}\boldsymbol{f}$, 将其扩张为 $\operatorname{Ker}\boldsymbol{f}$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{v},\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 再扩张为 V 的一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{v},\cdots,\boldsymbol{e}_n$. 经计算可得 $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_i\,(i\geq 2)$, 于是可逆初等线性变换 $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}}$ 在这组基下的表示矩阵为第三类初等阵 $\boldsymbol{T}_{12}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1))$.

[问题 2019A14] 对阶数 n 进行归纳. 当 $n=1$ 时, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 结论显然成立. 设 $n-1$ 阶时结论成立, 现证 n 阶的情形. 若 $\boldsymbol{A}$ 是纯量阵, 则由 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0$ 可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 此时结论显然成立. 若 $\boldsymbol{A}$ 不是纯量阵, 则由 [问题 2019A09] 开始部分的讨论可知, 存在非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{K}^n$, 使得 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 线性无关, 再将其扩张为 $\mathbb{K}^n$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{A\alpha}$, $\boldsymbol{e}_3,\cdots,\boldsymbol{e}_n$. 令非异阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$, 则

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&*&\cdots&*\\1&*&\cdots&*\\0&*&\cdots&*\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&*&\cdots&*\end{pmatrix},$$

即有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\alpha}'\\\boldsymbol{\beta}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B}\in M_{n-1}(\mathbb{K})$ 且 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0$. 由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶非异阵 $\boldsymbol{Q}_1$, 使得 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{BQ}_1$ 的主对角元全为零, 令 $\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}\{1,\boldsymbol{Q}_1\}$ 为 n 阶

非异阵, 则

$$(\boldsymbol{PQ})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PQ}) = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\alpha}' \\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{Q}_1 \\ \boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1 \end{pmatrix}$$

的主对角元全为零, 结论得证. 本题高代 II 的证法请参考高代白皮书例 7.24.

§ 1.13 19 级高等代数 II 每周一题

[问题 2020S01] 设数域 $\mathbb{K}$ 上的二元多项式 $f(x,y)$ 关于 x 的次数小于等于 n, 关于 y 的次数小于等于 m. 设 $\mathbb{K}$ 中存在两组互不相同的数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_0,b_1,\cdots,b_m$, 使得

$$f(a_i,b_j)=0,\ \ 0\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq m.$$

证明: $f(x,y)$ 是零多项式.

[问题 2020S02] 请用特征值法重新证明高代白皮书的例 5.76, 例 3.82 和例 3.84:

(1) 设 $f(x),g(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的互素多项式, $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 满足 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 证明: $g(\boldsymbol{A})$ 是非异阵.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, $\boldsymbol{S}$ 为 n 阶实反对称阵, 证明: $\boldsymbol{I}_n\pm\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{I}_n\pm \mathrm{i}\boldsymbol{A}$ 都是非异阵.

[问题 2020S03] 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c & & & a\end{pmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件.

[问题 2020S04] 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, $f(x),g(x)$ 为 $\mathbb{K}$ 上互素的多项式, 且它们在 $\mathbb{C}$ 中均无重根. 证明: 若 $\mathrm{r}(f(\boldsymbol{A}))+\mathrm{r}(g(\boldsymbol{A}))=n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 复可对角化.

[问题 2020S05] 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足: $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值都大于零, 且 $\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^3+\boldsymbol{B}^4$, 证明: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

[问题 2020S06] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, $f(x)\in\mathbb{C}[x]$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & f(\boldsymbol{A}) \\ f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 可对角化.

[问题 2020S07] 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶行列式因子是一个 $n-2$ 次多项式, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组及其有理标准型.

[问题 2020S08] 设 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{K})$ 的不变因子组是 $1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$, 其中 $d_i(\lambda)$ 是非常数首一多项式, $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)\,(1\leq i\leq k-1)$, 证明: 对 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 $\lambda_0\in\mathbb{C}$,

$$\mathrm{r}(\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=n-\sum_{i=1}^{k}\delta_{d_i(\lambda_0),0},$$

其中记号 $\delta_{a,b}$ 表示: 若 $a=b$, 取值为 1; 若 $a\neq b$, 取值为 0.

[问题 2020S09] 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, φ 的初等因子组为 $P_1(\lambda)^{r_1}, P_2(\lambda)^{r_2}, \cdots, P_k(\lambda)^{r_k}$, 其中 $P_i(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的首一不可约多项式. 证明: 存在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k \in V$, 使得

$$V = C(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\alpha}_1) \oplus C(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\alpha}_2) \oplus \cdots \oplus C(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\alpha}_k),$$

其中 $C(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\alpha}_i) = L(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}_i), \boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\alpha}_i), \cdots)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 关于循环向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的循环子空间.

[问题 2020S10] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实方阵, 试求 $C(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{B} \in M_3(\mathbb{R}) \mid \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}\}$.

[问题 2020S11] 设 V 为 n 阶复方阵全体构成的线性空间, V 上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 定义为 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{XA}'$, 其中 $\boldsymbol{A} \in V$. 证明: $\boldsymbol{\varphi}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

[问题 2020S12] 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶复方阵, 证明: $(\boldsymbol{AB})^n$ 与 $(\boldsymbol{BA})^n$ 相似.

[问题 2020S13] 求 $n\,(n \geq 2)$ 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的正负惯性指数:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

[问题 2020S14] 求下列 n 元实二次型的规范标准型:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \max\{i, j\} x_i x_j.$$

[问题 2020S15] 设 $\boldsymbol{M}$ 为 n 阶实方阵, 若对任意的 n 维实列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha} \geq 0$, 则称 $\boldsymbol{M}$ 为亚半正定阵.

(1) 证明: n 阶实方阵 $\boldsymbol{M}$ 是亚半正定阵 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}'$ 是半正定阵 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{S}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是半正定实对称阵, $\boldsymbol{S}$ 是实反对称阵.

(2) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶亚半正定阵, c 为非负实数, 证明:

(2.1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $c\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$ 和 $\boldsymbol{A}^*$ 都是亚半正定阵;

(2.2) 若 $\boldsymbol{C}$ 为 n 阶实方阵, 则 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{AC}$ 也是亚半正定阵;

(2.3) 若 $\boldsymbol{C}$ 为 n 阶亚正定阵, 则 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}$ 也是亚正定阵;

(2.4) $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部都大于等于零, 特别地, $|\boldsymbol{A}| \geq 0$;

(2.5) 举例说明: 非异的亚半正定阵不一定是亚正定阵.

[问题 2020S16] 设 a 为正实数, 证明下列 n 阶实对称阵为正定阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & \dfrac{a^2}{2} & \dfrac{a^3}{3} & \cdots & \dfrac{a^n}{n} \\ \dfrac{a^2}{2} & \dfrac{a^3}{3} & \dfrac{a^4}{4} & \cdots & \dfrac{a^{n+1}}{n+1} \\ \dfrac{a^3}{3} & \dfrac{a^4}{4} & \dfrac{a^5}{5} & \cdots & \dfrac{a^{n+2}}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{a^n}{n} & \dfrac{a^{n+1}}{n+1} & \dfrac{a^{n+2}}{n+2} & \cdots & \dfrac{a^{2n-1}}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

[问题 2020S17] 设 V 为区间 $[-1,1]$ 上由次数不超过 3 的实系数多项式构成的实线性空间, V 上的内积定义为

$$(f,g)=\int_{-1}^{+1} f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

试求

$$\min_{f(x)\in V}\int_{-1}^{+1}(\sin\pi x-f(x))^2\mathrm{d}x.$$

[问题 2020S18] 设 $\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶正交阵, 1 不是 $\boldsymbol{Q}$ 的特征值. 设 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_n-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'$, 其中 $\boldsymbol{u}$ 是单位实列向量. 证明: 1 是 $\boldsymbol{PQ}$ 的特征值.

♣ ♣ ♣

§ 1.13 解答或提示

[问题 2020S01] 将 $f(x,y)$ 整理为关于主未定元 x 的多项式:

$$f(x,y)=c_n(y)x^n+c_{n-1}(y)x^{n-1}+\cdots+c_1(y)x+c_0(y),$$

其中 $c_i(y)\,(0\le i\le n)$ 都是关于 y 的次数小于等于 m 的多项式. 对于给定的 $b_j\,(0\le j\le m)$, 关于 x 的多项式 $f(x,b_j)=c_n(b_j)x^n+c_{n-1}(b_j)x^{n-1}+\cdots+c_1(b_j)x+c_0(b_j)$ 至少有 $n+1$ 个不同的根 $a_0,a_1,\cdots,a_n$, 于是 $f(x,b_j)$ 必为零多项式, 即有 $c_n(b_j)=c_{n-1}(b_j)=\cdots=c_1(b_j)=c_0(b_j)=0\,(0\le j\le m)$. 这说明每个关于 y 的次数小于等于 m 的多项式 $c_i(y)\,(0\le i\le n)$ 都有 $m+1$ 个不同的根 $b_0,b_1,\cdots,b_m$, 从而它们只能是零多项式, 于是 $f(x,y)$ 也是零多项式.

[问题 2020S02] (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则由 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ 可知 $f(\lambda_i)=0\,(1\le i\le n)$, 即 λ_i 都是 $f(x)$ 的根; 又 $g(\boldsymbol{A})$ 的全体特征值为 $g(\lambda_1),g(\lambda_2),\cdots,g(\lambda_n)$.

由于 $f(x),g(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 上互素, 故它们在 $\mathbb{C}$ 上无公共根, 从而 λ_i 都不是 $g(x)$ 的根, 即 $g(\boldsymbol{A})$ 的全体特征值 $g(\lambda_i)\neq 0$, 于是 $g(\boldsymbol{A})$ 是非异阵. 类似的可参考高代白皮书例 6.10.
(2) 参考高代白皮书第 301 页例 3.82 和例 3.84 的证法 2.

[问题 2020S03] 由高代白皮书第 6 章解答题 2 可知, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|=(\lambda-a)^{n-2}\big((\lambda-a)^2-(n-1)bc\big)$. 下分三种情况进行讨论.
(1) 若 $b=c=0$, 则 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{I}_n$ 可对角化.
(2) 若 $b\neq 0$ 且 $c=0$, 或者 $b=0$ 且 $c\neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 是主对角元全为 a 的上三角阵或者下三角阵, 此时 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化, 否则 $\boldsymbol{A}$ 将是纯量阵, 矛盾!
(3) 若 $b\neq 0$ 且 $c\neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 a ($n-2$ 重), $a\pm\sqrt{(n-1)bc}$ (各 1 重). 经计算可知特征值 a 的几何重数等于 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{I}_n)=n-2$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 有完全的特征向量系, 从而 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

[问题 2020S04] 参考高代白皮书第 6 章解答题 11.

[问题 2020S05] 将 $\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^3+\boldsymbol{B}^4$ 整理为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^3)=(\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^3)(-\boldsymbol{B})$, 注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数, $-\boldsymbol{B}$ 的特征值全为负数, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{B}$ 没有公共的特征值, 由高代白皮书例 6.88 可得 $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{O}$. 再将这一等式整理为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2)=(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2)(-\boldsymbol{B})$, 由相同的理由可得 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}$. 最后将上述等式整理为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(-\boldsymbol{B})$, 由相同的理由可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

[问题 2020S06] 本题的必要性即为 [问题 2014S04], 下证充分性. 容易验证 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$ 的逆阵为 $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$, 考虑如下相似变换:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & f(\boldsymbol{A})\\ f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A})\end{pmatrix},$$

故由 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & f(\boldsymbol{A})\\ f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 可对角化得到 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A})\end{pmatrix}$ 也可对角化, 再由高代白皮书例 6.71 可知 $\boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A})$ 都可对角化. 又 $\boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A})$ 乘法可交换, 故由高代白皮书例 6.41 可知这两个矩阵可同时对角化, 即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+f(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}_1$, $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-f(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}_2$ 都是对角阵. 上述等式相加可得

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\Lambda}_1+\boldsymbol{\Lambda}_2)$ 也是对角阵, 即 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

[问题 2020S07] 参考高代白皮书第 7 章解答题 1.

[问题 2020S08] 参考高代白皮书例 7.23.

[问题 2020S09] 参考高代白皮书例 7.20.

[问题 2020S10] 参考高代白皮书第 7 章解答题 4.

[问题 2020S11] 参考高代白皮书第 7 章解答题 7.

[问题 2020S12] 证法 1 注意到 $(\boldsymbol{AB})^n=\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})^{n-1}\big)\boldsymbol{B}$, $(\boldsymbol{BA})^n=\boldsymbol{B}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})^{n-1}\big)$, 故由 [问题 2014S10] 可知, 只要证明 $\mathrm{r}\left((\boldsymbol{AB})^{ni}\right)=\mathrm{r}\left((\boldsymbol{BA})^{ni}\right)(1\leq i\leq n-1)$ 成立即可. 由高代白皮书例 7.66 可知 $\mathrm{r}\left((\boldsymbol{AB})^{ni}\right)=\mathrm{r}\left((\boldsymbol{AB})^{n}\right)(1\leq i\leq n-1)$, 这也等于 $\boldsymbol{AB}$ 的非零特征值的个数, 同理可知 $\mathrm{r}\left((\boldsymbol{BA})^{ni}\right)=\mathrm{r}\left((\boldsymbol{BA})^{n}\right)(1\leq i\leq n-1)$, 这也等于 $\boldsymbol{BA}$ 的非零特征值的个数. 再由高代白皮书例 6.19 可知 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征多项式, 于是结论得证.

证法 2 由 [问题 2014S10] 的证明过程或教学论文 [15] 的例 8 可知, $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的非零特征值的 Jordan 块完全相同, 但它们的零特征值的 Jordan 块可能不同. 因此可设 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 为非异阵, 使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{ABP}&=\boldsymbol{J}_1=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_1}(\lambda_1),\cdots,\boldsymbol{J}_{r_k}(\lambda_k),\boldsymbol{J}_{s_1}(0),\cdots,\boldsymbol{J}_{s_l}(0)\},\\ \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BAQ}&=\boldsymbol{J}_2=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_1}(\lambda_1),\cdots,\boldsymbol{J}_{r_k}(\lambda_k),\boldsymbol{J}_{t_1}(0),\cdots,\boldsymbol{J}_{t_m}(0)\},\end{aligned}$$

其中 $\lambda_i\neq 0\,(1\leq i\leq k)$. 注意到 $\boldsymbol{J}_{s_i}(0)^n=\boldsymbol{O}\,(1\leq i\leq l)$, $\boldsymbol{J}_{t_j}(0)^n=\boldsymbol{O}\,(1\leq j\leq m)$, 故

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{AB})^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}_1^n=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_1}(\lambda_1)^n,\cdots,\boldsymbol{J}_{r_k}(\lambda_k)^n,0,\cdots,0\}=\boldsymbol{J}_2^n=\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{BA})^n\boldsymbol{Q},$$

于是 $(\boldsymbol{AB})^n$ 与 $(\boldsymbol{BA})^n$ 相似.

[问题 2020S13] 参考高代白皮书例 8.9.

[问题 2020S14] 参考高代白皮书例 8.42 (1).

[问题 2020S15] 参考高代白皮书例 8.67 和第 8 章解答题 14.

[问题 2020S16] 设 $V=C[0,a]$ 为 $[0,a]$ 区间上的连续函数全体构成的欧氏空间, 其内积定义为 $(f(x),g(x))=\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 容易验证 $\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ 是 V 中一组线性无关的向量, 且 $\boldsymbol{A}$ 为其 Gram 矩阵. 由高代白皮书例 9.5 可知 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵.

[问题 2020S17] 本题即求 $\min\limits_{f(x)\in V}\|\sin\pi x-f(x)\|^2$. 由高代白皮书例 9.11 可知, V 的一组标准正交基为 $w_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $w_1(x)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}x$, $w_2(x)=\sqrt{\dfrac{5}{8}}(3x^2-1)$, $w_3(x)=\sqrt{\dfrac{7}{8}}(5x^3-3x)$, 经计算可得 $(\sin\pi x,w_0(x))=0$, $(\sin\pi x,w_1(x))=\dfrac{\sqrt{6}}{\pi}$, $(\sin\pi x,w_2(x))=0$, $(\sin\pi x,w_3(x))=\dfrac{\sqrt{14}(\pi^2-15)}{\pi^3}$. 因此, 由 Gram-Schmidt 方法的几何意义可得

$$\begin{aligned}
&\min_{f(x)\in V}\|\sin\pi x-f(x)\|^2=\|\sin\pi x-\sum_{i=0}^{3}(\sin\pi x,w_i(x))w_i(x)\|^2\\
&=\|\sin\pi x-\frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}x-\frac{\sqrt{14}(\pi^2-15)}{\pi^3}\sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3-3x)\|^2\\
&\approx 0.00878023324.
\end{aligned}$$

[问题 2020S18] 参考高代白皮书例 9.44.

§ 1.14 20 级高等代数 II 每周一题

[问题 2021S01] 请用多元多项式的整性证明: 数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵全体构成的线性空间 $M_n(\mathbb{K})$ 有一组 (无穷组) 由非异矩阵构成的基.

[问题 2021S02] (1) 请将下列对称有理函数表示为初等对称多项式的有理函数, 并求 $\sigma_1=0$ 时的函数值:

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1^2}{2x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{2x_2^2+x_3x_1}+\frac{x_3^2}{2x_3^2+x_1x_2};$$

(2) 请将下列对称有理函数表示为初等对称多项式的有理函数, 并求 $\sigma_1=2$, $\sigma_2=-6$, $\sigma_3=1$ 时的函数值:

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{x_1x_2+2x_3}+\frac{1}{x_2x_3+2x_1}+\frac{1}{x_3x_1+2x_2}.$$

[问题 2021S03] 设 $V=M_n(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵全体构成的集合.

(1) 将 V 看成是复线性空间, V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{J}\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{J}$ 是基础循环矩阵 (高代白皮书例 2.1), 试求 φ 的全体特征值和对应的特征向量;

(2) 将 V 看成是实线性空间, V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(\boldsymbol{X})=\overline{\boldsymbol{X}}$, 其中 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的共轭矩阵, 试求 φ 的全体特征值和对应的特征向量.

[问题 2021S04] (1) 设 2 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{I}_2|=1$, 其中 $k=1,3$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 是幂零阵;

(2) 设 3 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{I}_3|=1$, 其中 $k=1,2,3,7$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 是幂零阵.

注 可利用以下表示进行计算 (不需要证明), 其中 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 分别是未定元 x_1,x_2,x_3 的初等对称多项式:

$$\begin{aligned}&(x_1^7+1)(x_2^7+1)(x_3^7+1)\\&=\sigma_3^7+7\sigma_3^4\sigma_1^2+7\sigma_3^4\sigma_2-21\sigma_3^3\sigma_1\sigma_2^2-7\sigma_3^3\sigma_1^3\sigma_2+7\sigma_3^2\sigma_2^4+14\sigma_3^2\sigma_1^2\sigma_2^3+7\sigma_3^2\sigma_1\\&-7\sigma_3\sigma_1\sigma_2^5+7\sigma_3\sigma_1^4+7\sigma_3\sigma_2^2-21\sigma_3\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_1^7+\sigma_2^7-7\sigma_1\sigma_2^3+14\sigma_1^3\sigma_2^2-7\sigma_1^5\sigma_2+1.\end{aligned}$$

[问题 2021S05] 设 $V=M_n(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵全体构成的复线性空间, V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{J}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{J}'$, 其中 $\boldsymbol{J}$ 是基础循环矩阵 (高代白皮书例 2.1), 证明: φ 可对角化.

[问题 2021S06] 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{M}$ 的秩等于 2, 请用 $\boldsymbol{M}$ 的特征值的相关条件给出 $\boldsymbol{M}$ 可对角化的充分必要条件.

[问题 2021S07] 设 a_0, a_1, a_2 为有理数, 使得

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 + a_2 & a_1 + a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 + a_2 \end{pmatrix}$$

为奇异阵. 证明: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

[问题 2021S08] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换. 证明: 若 $\boldsymbol{\varphi}$ 有 r 维不变子空间, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 必有 $n-r$ 维不变子空间.

[问题 2021S09] 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 $n\,(n \geq 2)$ 阶方阵, 已知 $\boldsymbol{AB}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(0)$, 试求 $\boldsymbol{BA}$ 的 Jordan 标准型, 并举例说明存在性.

[问题 2021S10] 设 S 是某些 n 阶方阵构成的集合, 满足如下条件:

(1) $\boldsymbol{I}_n \in S$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in S$, 则 $\boldsymbol{AB} \in S$;

(3) 对任意的 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in S$, $(\boldsymbol{AB})^3 = \boldsymbol{BA}$ 成立.

证明: S 中的矩阵可以同时对角化, 并且 S 是有限集合.

[问题 2021S11] 设 $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

(1) 证明: $\boldsymbol{J}$ 相似于 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}, \cdots, \boldsymbol{S}\}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R})$, 满足 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 证明: $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}'}\boldsymbol{J}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{J}$;

(3) 试求 $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}$.

[问题 2021S12] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称阵, n 维实列向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta} > 0$, 证明: $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A} - \dfrac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'A}{\boldsymbol{\beta}'A\boldsymbol{\beta}} + \dfrac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}}$ 是正定阵.

[问题 2021S13] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶半正定实对称阵, $\boldsymbol{S}$ 为 n 阶实反对称阵, 证明:

(1) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{S}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{S})$;

(2) $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{S}| > 0$ 的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{S}) = n$.

[问题 2021S14] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为 n 阶正定实对称阵, $\boldsymbol{A}^{-1} = (b_{ij})$. 证明: $a_{ii}b_{ii} \geq 1\,(1 \leq i \leq n)$, 并且等号全部成立, 即 $a_{ii}b_{ii} = 1\,(1 \leq i \leq n)$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵.

[问题 2021S15] 设 n 维欧氏空间 V 中 $n+1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 两两之间的距离都是 $d>0$. 令 $\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_0\,(1\leq i\leq n)$, 证明:

(1) $(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_j) = \dfrac{d^2}{2}\,(1\leq i\neq j\leq n)$;

(2) $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 的一组基.

[问题 2021S16] 若复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数, 则记其中的最大, 最小特征值分别为 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$, $\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})$. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, $\boldsymbol{S}$ 为 n 阶实反对称阵, 证明: 对 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}$ 的任一特征值 λ_0, 有:

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}) \leq \mathrm{Re}\lambda_0 \leq \lambda_{\max}(\boldsymbol{A}), \quad \lambda_{\min}(-\mathrm{i}\boldsymbol{S}) \leq \mathrm{Im}\,\lambda_0 \leq \lambda_{\max}(-\mathrm{i}\boldsymbol{S}).$$

[问题 2021S17] 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \inf_{\det \boldsymbol{X}\neq 0} \|\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\|_{\mathrm{F}}^2,$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 是由矩阵的 Frobenius 内积诱导的范数.

[问题 2021S18] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实幂等阵, 证明: $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 的非零特征值都大于等于 1.

♣ ♣ ♣

§ 1.14 解答或提示

[问题 2021S01] 设 n^2 个矩阵为

$$\boldsymbol{X}_i = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & x_{12}^{(i)} & \cdots & x_{1n}^{(i)} \\ x_{21}^{(i)} & x_{22}^{(i)} & \cdots & x_{2n}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}^{(i)} & x_{n2}^{(i)} & \cdots & x_{nn}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad 1\leq i\leq n^2.$$

将这些矩阵的元素排成 n^2 个列向量, 再拼在一起成为一个 n^2 阶矩阵

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{11}^{(2)} & \cdots & x_{11}^{(n^2)} \\ x_{12}^{(1)} & x_{12}^{(2)} & \cdots & x_{12}^{(n^2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{nn}^{(1)} & x_{nn}^{(2)} & \cdots & x_{nn}^{(n^2)} \end{pmatrix}.$$

显然, 矩阵 $\boldsymbol{X}_i$ 是非异阵当且仅当 $\det(\boldsymbol{X}_i)\neq 0$, 矩阵 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n^2}$ 线性无关当且仅当 $\det(\boldsymbol{M})\neq 0$. 考虑关于未定元 $x_{ij}^{(k)}\,(1\leq i,j\leq n,\,1\leq k\leq n^2)$ 的多元多项式

$$f(x_{ij}^{(k)})=\det(\boldsymbol{X}_1)\det(\boldsymbol{X}_2)\cdots\det(\boldsymbol{X}_{n^2})\det(\boldsymbol{M}),$$

注意到 $\det(\boldsymbol{X}_i)\,(1\leq i\leq n^2)$ 和 $\det(\boldsymbol{M})$ 作为多元多项式都不为零, 故由多元多项式的整性可知, 它们的乘积 f 也非零, 从而在数域 $\mathbb{K}$ 中存在一组 (无穷组) 数 $a_{ij}^{(k)}\,(1\leq i,j\leq n,\,1\leq k\leq n^2)$, 使得 $f(a_{ij}^{(k)})\neq 0$. 因此, $M_n(\mathbb{K})$ 有一组 (无穷组) 由非异矩阵构成的基. 也可以直接进行构造: 设 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是 n 阶基础矩阵, 则容易验证 $\{\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{E}_{ij}\,(1\leq i,j\leq n)\}$ 是一组非异矩阵构成的基.

[问题 2021S02] (1) 通分后可得

$$Q(x_1,x_2,x_3)=$$
$$\frac{x_1^2(2x_2^2+x_3x_1)(2x_3^2+x_1x_2)+x_2^2(2x_3^2+x_1x_2)(2x_1^2+x_2x_3)+x_3^2(2x_1^2+x_2x_3)(2x_2^2+x_3x_1)}{(2x_1^2+x_2x_3)(2x_2^2+x_3x_1)(2x_3^2+x_1x_2)}.$$

注意到 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 的分子和分母都是关于 x_1,x_2,x_3 的 6 次齐次对称多项式, 故可通过待定系数法将它们化为初等对称多项式的多项式. 经计算可得

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\frac{\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_2^3-15\sigma_1\sigma_2\sigma_3+27\sigma_3^2}{2\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_2^3-18\sigma_1\sigma_2\sigma_3+27\sigma_3^2}.$$

当 $\sigma_1=0$ 时, $Q(x_1,x_2,x_3)=1$.

(2) 通分后可得

$$Q(x_1,x_2,x_3)=$$
$$\frac{(x_2x_3+2x_1)(x_3x_1+2x_2)+(x_3x_1+2x_2)(x_1x_2+2x_3)+(x_1x_2+2x_3)(x_2x_3+2x_1)}{(x_1x_2+2x_3)(x_2x_3+2x_1)(x_3x_1+2x_2)}.$$

注意到 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 的分子和分母都是关于 x_1,x_2,x_3 的对称多项式, 故可通过 Vieta 定理将它们化为初等对称多项式的多项式. 经计算可得

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\frac{\sigma_1\sigma_3+2\sigma_1\sigma_2-6\sigma_3+4\sigma_2}{\sigma_3^2+2\sigma_1^2\sigma_3-4\sigma_2\sigma_3+4\sigma_2^2-8\sigma_1\sigma_3+8\sigma_3}.$$

当 $\sigma_1=2,\ \sigma_2=-6,\ \sigma_3=1$ 时, $Q(x_1,x_2,x_3)=-\dfrac{4}{13}$.

[问题 2021S03] (1) 设 $\omega_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}\,(0\leq k\leq n-1)$, 则由高代白皮书例 6.9 和例 6.55 可知, $\boldsymbol{\alpha}_k=(1,\omega_k,\cdots,\omega_k^{n-1})'$ 是基础循环矩阵 $\boldsymbol{J}$ 关于特征值 ω_k 的特征

向量, 且 $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关. 设 $\boldsymbol{e}_i'=(0,\cdots,1,\cdots,0)$ 为标准单位行向量, 参考高代白皮书例 6.1 的讨论可知, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}_k\boldsymbol{e}_i')=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha}_k\boldsymbol{e}_i')=(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\alpha}_k)\boldsymbol{e}_i'=\omega_k(\boldsymbol{\alpha}_k\boldsymbol{e}_i')$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_k\boldsymbol{e}_i'$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 关于特征值 ω_k 的特征向量. 容易验证 $\{\boldsymbol{\alpha}_k\boldsymbol{e}_i'\,(0\le k\le n-1,\,1\le i\le n)\}$ 是一组线性无关的矩阵, 于是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征值为 $\omega_k\,(0\le k\le n-1)$ (各 n 重), 对应的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_k\boldsymbol{e}_i'\,(0\le k\le n-1,\,1\le i\le n)$.

(2) 显然, $\boldsymbol{\varphi}$ 是实线性变换 (不是复线性变换) 且满足 $\boldsymbol{\varphi}^2=\boldsymbol{I}_V$, 于是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征值只可能是 ±1. 设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}\in V$, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实矩阵, 若 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}$, 则有 $\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}$, 于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$; 若 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=-\boldsymbol{X}$, 则有 $\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{B}$, 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 因此, $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征值为 ±1 (各 n^2 重), 特征值 1 的线性无关特征向量为 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\,(1\le i,j\le n)\}$, 特征值 -1 的线性无关特征向量为 $\{\mathrm{i}\boldsymbol{E}_{ij}\,(1\le i,j\le n)\}$.

[问题 2021S04] (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_1,λ_2, 则 $\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{I}_2$ 的特征值为 $\lambda_1^k+1,\lambda_2^k+1$, 故由 $|\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{I}_2|=1\,(k=1,3)$ 可得 $(\lambda_1^k+1)(\lambda_2^k+1)=1\,(k=1,3)$. 将上述关于 λ_1,λ_2 的对称多项式化为关于初等对称多项式 σ_1,σ_2 的多项式, 可得

$$\sigma_1+\sigma_2=0, \tag{1.14.1}$$

$$\sigma_1^3+\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2=0. \tag{1.14.2}$$

将 (1.14.1) 式代入 (1.14.2) 式可得 $\sigma_1\sigma_2=0$, 于是 $\sigma_1=\sigma_2=0$, 从而 $\lambda_1=\lambda_2=0$, 故 $\boldsymbol{A}$ 为幂零阵.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 则 $\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{I}_3$ 的特征值为 $\lambda_1^k+1,\lambda_2^k+1,\lambda_3^k+1$, 故由 $|\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{I}_2|=1\,(k=1,2,3,7)$ 可得 $(\lambda_1^k+1)(\lambda_2^k+1)(\lambda_3^k+1)=1\,(k=1,2,3,7)$. 将上述关于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的前三个对称多项式化为关于初等对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式, 可得

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0, \tag{1.14.3}$$

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\sigma_2-2\sigma_1\sigma_3=0, \tag{1.14.4}$$

$$\sigma_1^3+\sigma_2^3+\sigma_3^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2+3\sigma_3-3\sigma_1\sigma_2=0. \tag{1.14.5}$$

由 (1.14.3) 式可得 $\sigma_1^3+\sigma_2^3+\sigma_3^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3=0$, 于是 (1.1.4.5) 式可化为 $\sigma_3^2+\sigma_3=\sigma_1\sigma_2$. 再将 $\sigma_2=-\sigma_1-\sigma_3$ 代入 (1.14.4) 中可得 $\sigma_1^2+\sigma_1+\sigma_3^2+\sigma_3=0$, 于是 $\sigma_1^2+\sigma_1+\sigma_1\sigma_2=0$. 若 $\sigma_1=0$, 则由 $\sigma_3^2+\sigma_3=0$ 可解出 $\sigma_3=0$ 或 -1. 因此 $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(0,0,0)$ 或 $(0,1,-1)$. 若 $\sigma_1\neq0$, 则 $\sigma_1+\sigma_2+1=0$, 于是 $\sigma_3=1$, 从而 $\sigma_1+\sigma_2=-1$, $\sigma_1\sigma_2=2$. 因此

$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(\frac{-1+\sqrt{7}\mathrm{i}}{2},\frac{-1-\sqrt{7}\mathrm{i}}{2},1)$ 或 $(\frac{-1-\sqrt{7}\mathrm{i}}{2},\frac{-1+\sqrt{7}\mathrm{i}}{2},1)$. 利用给出的公式经计算可知, 当 $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\neq(0,0,0)$ (即其他三种情形) 时, $(\lambda_1^7+1)(\lambda_2^7+1)(\lambda_3^7+1)=8$, 不符合题意, 舍去. 于是 $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(0,0,0)$, 从而 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, 故 $\boldsymbol{A}$ 为幂零阵. 如果不用给出的公式, 也可以如下简洁地讨论. 当 $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(0,1,-1)$ 时, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $x^3+x+1=0$ 的三个根. 注意到 $x^7-2x^2+1=(x^3+x+1)(x^3+x^2-1)(x-1)$, 故 λ_i 也是 $x^7-2x^2+1=0$ 的根, 于是 $\lambda_i^7+1=2\lambda_i^2$, 从而 $(\lambda_1^7+1)(\lambda_2^7+1)(\lambda_3^7+1)=8(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2=8$, 不符合题意, 舍去. 当 $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(\frac{-1+\sqrt{7}\mathrm{i}}{2},\frac{-1-\sqrt{7}\mathrm{i}}{2},1)$ 或 $(\frac{-1-\sqrt{7}\mathrm{i}}{2},\frac{-1+\sqrt{7}\mathrm{i}}{2},1)$ 时, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $x^3-\sigma_1x^2+\sigma_2x-1=0$ 的三个根. 注意到 $x^7-1=(x^3-\sigma_1x^2+\sigma_2x-1)(x^3-\sigma_2x^2+\sigma_1x-1)(x-1)$, 故 λ_i 也是 $x^7-1=0$ 的根, 于是 $\lambda_i^7+1=2$, 从而 $(\lambda_1^7+1)(\lambda_2^7+1)(\lambda_3^7+1)=8$, 不符合题意, 舍去.

注 n 阶情形的讨论可参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/16595949.html.

[问题 2021S05] 由 $\boldsymbol{J}^n=\boldsymbol{I}_n$ 可得 $\boldsymbol{\varphi}^{2n}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{J}^{2n}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{J}^{2n})'=\boldsymbol{X}$, 于是 $\boldsymbol{\varphi}^{2n}=\boldsymbol{I}_V$, 即 $\boldsymbol{\varphi}$ 适合多项式 $x^{2n}-1$. 由高代白皮书例 6.66 可知, $\boldsymbol{\varphi}$ 可对角化. 本题是 [20 级高代 II 期末 08] 的特例, 那里给出了本题更一般的证法.

[问题 2021S06] 由高代白皮书例 3.92, 考虑 $\boldsymbol{M}$ 的满秩分解 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{AB}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times2$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $2\times n$ 矩阵, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$. 设 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{BA}$ 为二阶复方阵, 则由特征值的降阶公式可得 $|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{M}|=\lambda^{n-2}|\lambda\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{N}|$. 下面分两种情况讨论.

(1) 若 $\boldsymbol{N}$ 为奇异阵, 则 $\boldsymbol{M}$ 的特征值 0 的代数重数大于 $n-2$, 其几何重数等于 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{M})=n-2$, 此时 $\boldsymbol{M}$ 没有完全的特征向量系, 故不可对角化.

(2) 若 $\boldsymbol{N}$ 为非异阵, 则由高代白皮书例 6.72 可知, $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{AB}$ 可对角化当且仅当 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{BA}$ 可对角化. 容易验证二阶非异阵 $\boldsymbol{N}$ 可对角化的充要条件是, 或者 $\boldsymbol{N}$ 有两个不同的特征值, 或者 $\boldsymbol{N}=c\boldsymbol{I}_2$ 为纯量阵.

设 $|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{M}|=\lambda^{n-2}(\lambda-a)(\lambda-b)$, 则由上面的讨论可知, $\boldsymbol{M}$ 可对角化的充要条件是, 或者 a,b 是互异的非零复数, 或者 $a=b=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{M})\neq0$, 且 $\mathrm{r}\left(\boldsymbol{M}-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{I}_n\right)=n-2$. 本题也与 [19 级高代 II 期中 04] 密切相关.

[问题 2021S07] 令 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 是 $f(x)=x^3-x-1$ 的友阵, 则 $\boldsymbol{C}^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$,

从而 $\boldsymbol{A}=a_0\boldsymbol{I}_3+a_1\boldsymbol{C}+a_2\boldsymbol{C}^2$. 由 $\boldsymbol{A}$ 奇异可知, 存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Q}^3$, 使得 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$. 又 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的特征多项式, 故由 Cayley-Hamilton 定理可知 $f(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$. 下面用反证法来证明. 若 a_0,a_1,a_2 不全为零, 则 $g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 是一个非零有理系数多项式, 满足 $\boldsymbol{A}=g(\boldsymbol{C})$. 另一方面, 容易验证 $f(x)$ 没有有理根, 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 于是 $(f(x),g(x))=1$. 因此, 存在 $u(x),v(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 使得 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$. 在上式中代入 $x=\boldsymbol{C}$, 并作用在 $\boldsymbol{\alpha}$ 上有

$$\boldsymbol{\alpha}=u(\boldsymbol{C})f(\boldsymbol{C})\boldsymbol{\alpha}+v(\boldsymbol{C})g(\boldsymbol{C})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

这与 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 矛盾! 事实上, 本题是高代白皮书例 5.80 的变种. 也可以用特征值来直接证明结论. 设 $\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{C}$, 则 $\boldsymbol{A}=g(\boldsymbol{C})$ 的特征值为 $g(\lambda_1),g(\lambda_2),g(\lambda_3)$. 由 $\boldsymbol{A}$ 奇异可知 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个特征值为零, 不妨设 $g(\lambda_1)=0$. 由于 $\boldsymbol{C}$ 的特征多项式 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 故 $f(x)$ 是 λ_1 的极小多项式, 于是 $f(x)\mid g(x)$, 从而 $g(x)=0$, 即有 $a_0=a_1=a_2=0$.

[问题 2021S08] 设 U 是 r 维 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间, 选取 U 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r\}$, 并将其扩张为 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示矩阵为分块上三角阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $r,n-r$ 阶方阵. 由高代白皮书例 7.3 可知, $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{M}'$ 相似, 即存在 n 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{MP}=\boldsymbol{M}'$. 令 $(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{P}$, 则由 $\boldsymbol{P}$ 的非异性可知 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 是 V 的一组基, 并且 $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{MP}=\boldsymbol{M}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}'&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}'&\boldsymbol{B}'\end{pmatrix}$. 令 $W=L(\boldsymbol{f}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{f}_n)$, 则容易验证 W 是 $n-r$ 维 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间.

[问题 2021S09] 由于 $\boldsymbol{AB}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}_n(0)$, 故 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全为零且 $(\boldsymbol{AB})^{n-1}\neq\boldsymbol{O}$. 由特征值的降阶公式可知 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值也全为零, 于是 $\boldsymbol{BA}$ 的特征多项式为 λ^n. 再由 $\boldsymbol{O}\neq(\boldsymbol{AB})^{n-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})^{n-2}\boldsymbol{B}$ 可知 $(\boldsymbol{BA})^{n-2}\neq\boldsymbol{O}$. 于是 $\boldsymbol{BA}$ 的极小多项式 λ^k 满足 $k>n-2$. 下面分两种情况讨论.

(1) 若 $\boldsymbol{BA}$ 的极小多项式为 λ^{n-1}, 则 $\boldsymbol{BA}$ 的初等因子组为 λ,λ^{n-1}, 于是 $\boldsymbol{BA}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0,\boldsymbol{J}_{n-1}(0)\}$. 例如, $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,0\}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{J}_n(0)$, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{J}_n(0)$, $\boldsymbol{BA}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_{n-1}(0),0\}$.

(2) 若 $\boldsymbol{BA}$ 的极小多项式为 λ^n, 则 $\boldsymbol{BA}$ 的初等因子组为 λ^n, 于是 $\boldsymbol{BA}$ 的 Jordan 标准型也为 $\boldsymbol{J}_n(0)$. 例如, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{J}_n(0)$, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{J}_n(0)$.

[问题 2021S10] 由 (1) 在 (3) 中令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_n$, 则对任意的 $\boldsymbol{A}\in S$, $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}$ 成立. 特别地, S 中的矩阵均可对角化, 且特征值只可能是 $0,1,-1$. 再由 (2) 和 (3) 可知, 对任意的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in S$, $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^3=\boldsymbol{BA}$, 即 S 中任意两个矩阵乘法可交换. 由高代白皮书例 6.44 可知, S 中的矩阵可同时对角化. 考虑到特征值的限制, 不难得到 $\sharp S\leq 3^n$.

[问题 2021S11] (1) 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_{2n}$ 是 $2n$ 维的标准单位列向量, 置换矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_{n+1},\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_{n+2},\cdots,\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_{2n})$, 由 [问题 2019A03] 可知 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵, 并且不难验证 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{JP}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{S},\cdots,\boldsymbol{S}\}$. 也可以利用有理标准型来证明. 显然, $\boldsymbol{S}$ 是多项式 λ^2+1 的 Frobenius 块. 由白皮书例 2.72 可知 $\lambda\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{J}=\begin{vmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{I}_n & \lambda\boldsymbol{I}_n\end{vmatrix}=|(\lambda^2+1)\boldsymbol{I}_n|=(\lambda^2+1)^n$. 注意到 $\boldsymbol{J}^2+\boldsymbol{I}_{2n}=\boldsymbol{O}$, 故 $\boldsymbol{J}$ 的极小多项式为 λ^2+1. 由于 λ^2+1 是实数域上的不可约多项式, 故 $\boldsymbol{J}$ 的不变因子组为 $1,\cdots,1,\lambda^2+1,\cdots,\lambda^2+1$, 再由有理标准型理论可知, $\boldsymbol{J}$ 相似于 $\boldsymbol{F}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{F}(\lambda^2+1),\cdots,\boldsymbol{F}(\lambda^2+1)\}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{S},\cdots,\boldsymbol{S}\}$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{J}+\boldsymbol{JA}=\boldsymbol{O}$ 可得 $\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{J}=-\boldsymbol{A}$. 注意到相似关系与幂级数相容以及 $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}}=(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}})^{-1}$, 故 $(\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}})^{-1}=\mathrm{e}^{-t\boldsymbol{A}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}^{-1}(t\boldsymbol{A}')\boldsymbol{J}}=\boldsymbol{J}^{-1}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}'}\boldsymbol{J}$, 于是 $\boldsymbol{J}=\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}'}\boldsymbol{J}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}$.

(3) 由 (1) 可知 $\boldsymbol{J}^2=-\boldsymbol{I}_{2n}$, 故

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}&=\boldsymbol{I}_{2n}+\frac{t\boldsymbol{J}}{1!}+\frac{(t\boldsymbol{J})^2}{2!}+\frac{(t\boldsymbol{J})^3}{3!}+\frac{(t\boldsymbol{J})^4}{4!}+\cdots\\&=(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots)\boldsymbol{I}_{2n}+(\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots)\boldsymbol{J}\\&=\cos t\boldsymbol{I}_{2n}+\sin t\boldsymbol{J}.\end{aligned}$$

[问题 2021S12] 参考高代白皮书例 8.47.

[问题 2021S13] 参考高代白皮书例 8.72.

[问题 2021S14] 参考高代白皮书例 8.15.

[问题 2021S15] 参考高代白皮书第 9 章解答题 4.

[问题 2021S16] 参考高代白皮书例 9.54.

[问题 2021S17] 参考高代白皮书例 9.98.

[问题 2021S18] 参考高代白皮书例 9.137.

§ 1.15　21 级高等代数 I 每周一题

[问题 2021A01] 求下列 n 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^2 & a & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

[问题 2021A02] 求下列 n 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & (x_2+x_3+\cdots+x_n)^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & (x_1+x_3+\cdots+x_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & (x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})^n \end{vmatrix}.$$

[问题 2021A03] 设多项式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, $\boldsymbol{A}$ 是 $f(x)$ 的友阵 (空白处全为零):

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} & & & & -a_n \\ 1 & & & & -a_{n-1} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}$, 求证: $\boldsymbol{X}$ 是对称阵.

[问题 2021A04] 求下列行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1^2+n-1 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \cdots & a_1+a_n \\ a_1+a_2 & a_2^2+1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1+a_3 & 1 & a_3^2+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1+a_n & 1 & 1 & \cdots & a_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

[问题 2021A05] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 满足:

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+a_m\boldsymbol{B}^m+a_{m-1}\boldsymbol{B}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{B},$$

其中 $a_m+a_{m-1}+\cdots+a_1\neq 0$. 求证: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

[问题 2021A06] 若 n 阶实方阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{PP}'=\boldsymbol{I}_n$, 则称 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵. 设 S 为 n 阶实反对称阵全体构成的集合, $T=\{\boldsymbol{P}$ 为 n 阶正交阵且满足 $\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{P}$ 可逆$\}$.

(1) 对任意的 $\boldsymbol{A}\in S$, 由高代白皮书例 2.30 可知 $\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}$ 可逆, 定义 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})^{-1}$, 证明: $\boldsymbol{\varphi}$ 是从 S 到 T 的映射.

(2) 对任意的 $\boldsymbol{P}\in T$, 定义 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{P})=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{P})(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{P})^{-1}$, 证明: $\boldsymbol{\psi}$ 是从 T 到 S 的映射.

(3) 证明: $\boldsymbol{\psi\varphi}=\boldsymbol{Id}_S$, $\boldsymbol{\varphi\psi}=\boldsymbol{Id}_T$, 其中 $\boldsymbol{Id}_S,\boldsymbol{Id}_T$ 表示 S,T 上的恒等映射, 即 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}$ 实现了集合 S 与 T 之间的一一对应.

(4) 设 n 阶实反对称阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\-1&0&1&\cdots&1\\-1&-1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&0\end{pmatrix},$$

试求 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})^{-1}$.

[问题 2021A07] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n\,(n\geq 2)$ 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 证明: $\boldsymbol{AB}^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{B}^*$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的伴随阵.

[问题 2021A08] 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p\}$ 是 $\mathbb{K}^m$ 中 p 个线性无关的 m 维列向量, $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q\}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 中 q 个线性无关的 n 维列向量. 证明: $\{\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\beta}_j'\,(1\leq i\leq p,\,1\leq j\leq q)\}$ 是 pq 个线性无关的 $m\times n$ 矩阵.

[问题 2021A09] 设 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩的 $m\times n$ 实矩阵.

(1) 求证: $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 为非异阵.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 的第一列元素全为 1, 令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'$, 求证: $\boldsymbol{P}$ 所有的主对角元素都大于等于 $\dfrac{1}{m}$.

[问题 2021A10] 设 $(V,+,\cdot)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 映射 $\boldsymbol{\varphi}:S\to V$ 是从集合 S 到 V 的一个双射. 设 $a,b\in S$, $k\in\mathbb{K}$, 定义 S 上的加法 $\oplus$ 为: $a\oplus b=\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}(a)+\boldsymbol{\varphi}(b))$;

定义 $\mathbb{K}$ 关于 S 的数乘 $\circ$ 为: $k\circ a=\boldsymbol{\varphi}^{-1}(k\cdot\boldsymbol{\varphi}(a))$.

(1) 证明: $(S,\oplus,\circ)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 并且 $\boldsymbol{\varphi}:S\to V$ 是线性同构;

(2) 在 [问题 2021A06] 中, n 阶实反对称阵全体构成的集合 S 是实数域上的线性空间, 请定义集合 $T=\{\boldsymbol{P}$ 为 n 阶正交阵且满足 $\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{P}$ 可逆$\}$ 上的加法和数乘 (写出具体的表达式), 使得 T 成为实数域上的线性空间, 并且 $\boldsymbol{\psi}:T\to S$ 成为线性同构.

[问题 2021A11] 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 证明: 存在分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$ (其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times r$ 矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是 $r\times n$ 矩阵) 的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的 r 个列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量张成线性空间的一组基, 或者 $\boldsymbol{C}$ 的 r 个行向量是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量张成线性空间的一组基. 此时, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解.

[问题 2021A12] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 r, k 为常数. 证明: $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是对 $\boldsymbol{A}$ 的任一满秩分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$ 都有 $\boldsymbol{CB}=k\boldsymbol{I}_r$.

注 本题是第三届全国大学生数学竞赛决赛一道代数试题的推广.

[问题 2021A13] 设 V,U 分别是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n,m 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}:V\to U$ 是线性映射. 证明:

(1) 存在 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 W, 满线性映射 $\boldsymbol{\xi}:V\to W$, 以及单线性映射 $\boldsymbol{i}:W\to U$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{i}\circ\boldsymbol{\xi}$;

(2) 若另外存在 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 W_1, 满线性映射 $\boldsymbol{\xi}_1:V\to W_1$, 以及单线性映射 $\boldsymbol{i}_1:W_1\to U$, 使得 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{i}_1\circ\boldsymbol{\xi}_1$, 则存在线性同构 $\boldsymbol{\eta}:W\to W_1$, 使得 $\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\eta}\circ\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}_1\circ\boldsymbol{\eta}$.

注 本题是矩阵的满秩分解的几何版本, 请用几何方法进行证明.

[问题 2021A14] 设 V 是 n 维复线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换. 证明: 可将 V 看成是 $2n$ 维实线性空间 V_0, $\boldsymbol{\varphi}$ 看成是 V_0 上的实线性变换 $\boldsymbol{\varphi}_0$, 并且 $\det(\boldsymbol{\varphi}_0)=|\det(\boldsymbol{\varphi})|^2$, 其中 $|\cdot|$ 表示复数的模长.

注 因为线性变换在不同基下的表示矩阵是相似的, 而且矩阵的行列式在相似关系下不改变, 所以线性变换的行列式定义为它的任一表示矩阵的行列式.

[问题 2021A15] (1) 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式, $1\leq k\leq n$. 设存在素数 p, 使得 $p\nmid a_n$, $p\mid a_{k-1}$, $p\mid a_{k-2}$, $\cdots$, $p\mid a_0$, $p^2\nmid a_0$, 证明: $f(x)$ 有一个次数大于等于 k 的不可约因子.

(2) 设 $n \geq 2$ 为正整数, p 为素数, 证明: $x^n + (p+2)x^{n-1} + p$ 在有理数域上不可约.

♣ ♣ ♣

§ 1.15 解答或提示

[问题 2021A01] 将 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 $i-1$ 行乘以 $-a$ 加到第 i 行上 $(i = n, \cdots, 2)$, 可得一个上三角行列式, 其主对角元依次为 $1, 1-a^2, \cdots, 1-a^2$, 于是 $|\boldsymbol{A}| = (1-a^2)^{n-1}$.

[问题 2021A02] 记 $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 则 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 (i, n) 元素可展开为

$$(x_1 + \cdots + \widehat{x_i} + \cdots + x_n)^n = (s - x_i)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k s^{n-k} x_i^k.$$

将 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 j 列乘以 $(-1)^j \mathrm{C}_n^{j-1} s^{n-j+1}$ 加到第 n 列上 $(j = 1, \cdots, n-1)$, 得到行列式的最后一列的元素为 $(-1)^{n-1} n s x_i^{n-1} + (-1)^n x_i^n$, 再对最后一列进行拆分, 由高代白皮书例 1.32 可得

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= (-1)^{n-1} ns \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1} ns \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) + (-1)^n s \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\
&= (-1)^{n-1} (n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
\end{aligned}$$

[问题 2021A03] 设 $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$, 则由 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}$ 经具体的计算可得 $x_{ij} = x_{i+1,j-1}$ $(1 \leq i \leq n-1,\ 2 \leq j \leq n)$. 因此对任意的 $1 \leq i < j \leq n$, 有 $x_{ij} = x_{i+1,j-1} = \cdots = x_{j-1,i+1} = x_{ji}$, 即 $\boldsymbol{X}$ 为对称阵.

[问题 2021A04] 由矩阵乘法以及高代白皮书例 1.4 可得

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & & & \\ 1 & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & & & \\ 1 & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1a_2\cdots a_n-\sum_{i=2}^n a_2\cdots\widehat{a_i}\cdots a_n\right)^2.$$

[问题 2021A05] 设 $g(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x$, 则由带余除法可知 $g(x)=(x-1)h(x)+g(1)$, 其中 $g(1)=a_m+a_{m-1}+\cdots+a_1\neq 0$. 由条件可知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}_n)=g(\boldsymbol{B})=h(\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}_n)+g(1)\boldsymbol{I}_n$, 经整理可得 $(\boldsymbol{A}-h(\boldsymbol{B}))(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}_n)=g(1)\boldsymbol{I}_n$, 即有 $\dfrac{1}{g(1)}(\boldsymbol{A}-h(\boldsymbol{B}))(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}_n)=\boldsymbol{I}_n$. 于是 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}_n)\dfrac{1}{g(1)}(\boldsymbol{A}-h(\boldsymbol{B}))=\boldsymbol{I}_n$, 即有 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A}-h(\boldsymbol{B}))=g(1)\boldsymbol{I}_n$, 经整理可得 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}+g(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{AB}$. 进一步, 由上述讨论可得 $\boldsymbol{A}-h(\boldsymbol{B})=g(1)(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}_n)^{-1}$, 再由高代白皮书例 6.86 可知 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}_n)^{-1}$ 是 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}_n$ 的多项式, 从而也是 $\boldsymbol{B}$ 的多项式, 于是 $\boldsymbol{A}$ 也可表示为 $\boldsymbol{B}$ 的多项式. 本题是高代白皮书例 2.21 的推广.

[问题 2021A06] (1) 即证明 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A})$ 是正交阵且 $\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A})$ 可逆, 具体的验证过程留给读者完成.

(2) 即证明 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{P})$ 是反对称阵, 具体的验证过程留给读者完成.

(3) 即证明 $\boldsymbol{\psi\varphi}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 以及 $\boldsymbol{\varphi\psi}(\boldsymbol{P})=\boldsymbol{P}$, 具体的验证过程留给读者完成. 本题的背景可参考高代白皮书例 9.122.

(4) 对分块矩阵 $(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}\,¦\,\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})$ 实施初等行变换, 可求出 $(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A})$. 具体的计算过程留给读者完成, 结果为 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}_{n-1}\\ 1 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

[问题 2021A07] 参考高代白皮书第 2 章解答题 12 (高代 I 的证法). 也可以利用高代白皮书例 6.87 直接得到结论 (高代 II 的证法).

[问题 2021A08] 参考高代白皮书第 3 章解答题 3. 也可以利用线性同构来证明. 将 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p\}$ 扩张为 $\mathbb{K}^m$ 的一组基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$, 将 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q\}$ 扩张为 $\mathbb{K}^n$ 的一组基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$, 则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别为 m,n 阶非异阵. 考虑 $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ 上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{PXQ}'$, 由高代白皮书例 4.16 类似的讨论可知 $\boldsymbol{\varphi}$ 是自同构. 设 $\boldsymbol{e}_i\,(1\leq i\leq m)$, $\boldsymbol{f}_j\,(1\leq j\leq n)$ 分别为 m,n 维标准单位列向量, 注意到基础矩阵 $\{\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{f}_j'\,(1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n)\}$ 构成了 $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ 的一组基, 并且 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{E}_{ij})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{f}_j')\boldsymbol{Q}'=(\boldsymbol{Pe}_i)\cdot(\boldsymbol{Qf}_j)'=\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\beta}_j$, 故 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\beta}_j'\,(1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n)\}$ 也构成了 $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ 的一组基. 特别地, $\{\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\beta}_j'\,(1\leq i\leq p,\,1\leq j\leq q)\}$ 是 pq 个线性无关的 $m\times n$ 矩阵.

[问题 2021A09] (1) 由高代白皮书例 3.76 可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$, 又 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 从而是非异阵.

(2) 由 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'$ 可得 $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, 以及 $\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}$. 设 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$, 则由 $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{P}$ 可得 $p_{ii}=\sum\limits_{j=1}^m p_{ij}^2\,(1\leq i\leq m)$; 由 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$ 以及 $\boldsymbol{A}$ 的第一列元素全为 1 可得 $\sum\limits_{j=1}^m p_{ij}=1\,(1\leq i\leq m)$; 最后由 Cauchy 不等式可得

$$1=\left(\sum_{j=1}^m p_{ij}\right)^2\leq m\left(\sum_{j=1}^m p_{ij}^2\right)=mp_{ii},\ 1\leq i\leq m,$$

于是 $p_{ii}\geq\dfrac{1}{m}$.

[问题 2021A10] (1) 容易验证 S 上的加法 $\oplus$ 和数乘 $\circ$ 满足线性空间的八条公理 (细节留给读者完成), 从而 S 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 由定义可知双射 $\boldsymbol{\varphi}:S\to V$ 满足 $\boldsymbol{\varphi}(a\oplus b)=\boldsymbol{\varphi}(a)+\boldsymbol{\varphi}(b)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}(k\circ a)=k\cdot\boldsymbol{\varphi}(a)$, 于是 $\boldsymbol{\varphi}:S\to V$ 是线性同构.

(2) 由 (1) 中的定义方式, 对任意的 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\in T$, $k\in\mathbb{R}$, 经计算可得 (细节留给读者完成):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\oplus\boldsymbol{Q}&=(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{P})^{-1}(-\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}+3\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})(3\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})^{-1}(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{P}),\\ k\circ\boldsymbol{P}&=\big((1-k)\boldsymbol{I}_n+(1+k)\boldsymbol{P}\big)\big((1+k)\boldsymbol{I}_n+(1-k)\boldsymbol{P}\big)^{-1}.\end{aligned}$$

[问题 2021A11] 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列分块, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列分块, $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{r\times n}$, 则分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 等价于下列形式行向量的乘积

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)\boldsymbol{C},\tag{1.15.1}$$

这也等价于

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\sum_{i=1}^r c_{ij}\boldsymbol{\beta}_i,\quad 1\leq j\leq n.\tag{1.15.2}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的列向量张成的子空间为 $U_{\boldsymbol{A}}=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{B}$ 的列向量张成的子空间为 $U_{\boldsymbol{B}}=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$. 先证必要性. 若存在分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$, 则由秩的基本不等式可得 $r=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leq\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leq\min\{m,r\}=r$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=r$. 同理可证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=r$, 因此 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解. 由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=r$ 可知 $\boldsymbol{B}$ 的列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关, 从而是 $U_{\boldsymbol{B}}$ 的一组基. 由 (1.15.2) 式可知 $U_{\boldsymbol{A}}\subseteq U_{\boldsymbol{B}}$, 又 $\dim U_{\boldsymbol{A}}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r=\dim U_{\boldsymbol{B}}$, 故 $U_{\boldsymbol{A}}=U_{\boldsymbol{B}}$,

于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是 $U_{\boldsymbol{A}}$ 的一组基. 再证充分性. 任取 $U_{\boldsymbol{A}}=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的一组基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$, 并按列分块的方式拼成 $m\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$, 由此可得 (1.15.2) 式和 (1.15.1) 式, 从而得到分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$. 同理可证关于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的结论.

[问题 2021A12] 先证充分性. 若对某一满秩分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$ 有 $\boldsymbol{CB}=k\boldsymbol{I}_n$, 则 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{BC})(\boldsymbol{BC})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{CB})\boldsymbol{C}=k\boldsymbol{BC}=k\boldsymbol{A}$. 再证充分性. 任取 $\boldsymbol{A}$ 的一个满秩分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$, 代入 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$ 中可得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{CB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}(k\boldsymbol{I}_r)\boldsymbol{C}$. 注意到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=r$, 故由高代白皮书例 3.91 可知 $\boldsymbol{B}$ 存在左逆, $\boldsymbol{C}$ 存在右逆, 于是可在上式中从左边消去 $\boldsymbol{B}$, 从右边消去 $\boldsymbol{C}$, 最后得到 $\boldsymbol{CB}=k\boldsymbol{I}_r$. 若 $k\neq 0$, 也可以利用高代白皮书例 3.95 和例 3.92 (2) 给出另一证明, 具体细节留给读者完成.

[问题 2021A13] (1) 令 $W=\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\varphi}$ 且 $\boldsymbol{\xi}:V\to W$ 与 $\boldsymbol{\varphi}$ 有相同的映射法则, 即 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})$, 显然 $\boldsymbol{\xi}:V\to W$ 是满线性映射. 注意到 $W=\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\varphi}$ 是 U 的子空间, 故令 $\boldsymbol{i}:W\to U$ 为嵌入映射, 即 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{w}$, 显然 $\boldsymbol{i}:W\to U$ 为单线性映射且 $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{i}\circ\boldsymbol{\xi}$.
(2) 我们来构造线性同构 $\boldsymbol{\eta}:W\to W_1$, 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, two heads, "\boldsymbol{\xi}"] \arrow[rr, bend left, "\boldsymbol{\varphi}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{\xi}_1"'] & W \arrow[r, hook, "\boldsymbol{i}"] \arrow[d, dotted, "\boldsymbol{\eta}"'] & U \\
& W_1 \arrow[ur, hook, "\boldsymbol{i}_1"'] &
\end{tikzcd}$$

对任意的 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})\in W=\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\varphi}$, 定义 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}))=\boldsymbol{\xi}_1(\boldsymbol{\alpha})$. 我们首先来验证这个定义不依赖于代表元的选取. 事实上, 若 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\beta})$, 则有 $\boldsymbol{i}_1(\boldsymbol{\xi}_1(\boldsymbol{\alpha})-\boldsymbol{\xi}_1(\boldsymbol{\beta}))=\boldsymbol{0}$, 由于 $\boldsymbol{i}_1$ 是单射, 故 $\boldsymbol{\xi}_1(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\xi}_1(\boldsymbol{\beta})$, 即有 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}))=\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\beta}))$, 于是 $\boldsymbol{\eta}$ 是定义好的映射, 并且容易验证它是一个线性映射 (留给读者自行完成). 由 $\boldsymbol{\eta}$ 的定义可知 $\boldsymbol{\eta\xi}=\boldsymbol{\xi}_1$, 即上图中左边的三角形可交换. 对任意的 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})\in W=\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\varphi}$, 有 $\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}))=\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{\xi}_1(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}))$, 于是 $\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{i}$, 即上图中右边的三角形可交换. 对任意的 $\boldsymbol{w}_1\in W_1$, 由于 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是满射, 故存在 $\boldsymbol{v}\in V$, 使得 $\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{\xi}_1(\boldsymbol{v})$, 于是 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}))=\boldsymbol{\xi}_1(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{w}_1$, 于是 $\boldsymbol{\eta}$ 是满射. 若 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}))=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}))=\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}))=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})$, 于是 $\boldsymbol{\eta}$ 是单射. 综上所述, $\boldsymbol{\eta}:W\to W_1$ 是满足上述交换图的线性同构.

[问题 2021A14] 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一组基, $\boldsymbol{\varphi}$ 在这组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$, 并且 $\boldsymbol{A}=\mathrm{Re}\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\mathrm{Im}\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的实虚部加法分解. 若将 V 看成是实数域上的线性空间 V_0, $\boldsymbol{\varphi}$ 看成是 V_0 上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}_0$, 则由高代白皮书例 3.32 的注可知,

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \mathrm{i}\boldsymbol{e}_1, \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2, \cdots, \mathrm{i}\boldsymbol{e}_n$ 是 V_0 的一组基, 并且由表示矩阵的定义可知 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 在这组基下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\boldsymbol{A} & -\mathrm{Im}\boldsymbol{A} \\ \mathrm{Im}\boldsymbol{A} & \mathrm{Re}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}$. 由高代白皮书例 2.71 可知

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{\varphi}_0) &= \begin{vmatrix} \mathrm{Re}\boldsymbol{A} & -\mathrm{Im}\boldsymbol{A} \\ \mathrm{Im}\boldsymbol{A} & \mathrm{Re}\boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\mathrm{Re}\boldsymbol{A} + \mathrm{i}\mathrm{Im}\boldsymbol{A}||\mathrm{Re}\boldsymbol{A} - \mathrm{i}\mathrm{Im}\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}||\overline{\boldsymbol{A}}| \\ &= \det(\boldsymbol{\varphi})\overline{\det(\boldsymbol{\varphi})} = |\det(\boldsymbol{\varphi})|^2. \end{aligned}$$

本题的推广可参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/15088633.html.

[问题 2021A15] (1) 对 $f(x)$ 的次数 n 进行归纳. $n = 1$ 时结论显然成立. 设次数小于 n 时结论成立, 现证明 n 次的情形. 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 则结论显然成立. 下设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 从而可分解为两个次数小于 n 的整系数多项式的乘积:

$$f(x) = (b_tx^t + b_{t-1}x^{t-1} \cdots + b_1x + b_0)(c_sx^s + c_{s-1}x^{s-1} + \cdots + c_1x + c_0).$$

由 $p \mid a_0 = b_0c_0$, $p^2 \nmid a_0$ 不妨设 $p \mid b_0$, $p \nmid c_0$. 由 $p \nmid a_n = b_tc_s$ 可得 $p \nmid b_t$, $p \nmid c_s$. 因此, 存在正整数 $l \leq t$, 使得 $p \mid b_0$, $p \mid b_1$, $\cdots$, $p \mid b_{l-1}$, 但 $p \nmid b_l$. 我们断言 $l \geq k$. 否则若 $l < k$, 则 $p \mid a_l = b_0c_l + b_1c_{l-1} + \cdots + b_{l-1}c_1 + b_lc_0$, 由此可得 $p \mid b_lc_0$, 这与假设矛盾. 对次数小于 n 的整系数多项式 $b_tx^t + b_{t-1}x^{t-1} \cdots + b_1x + b_0$ 用归纳假设可得此多项式有一个次数大于等于 l 的不可约因子, 这也是 $f(x)$ 的次数大于等于 l 的不可约因子.

(2) 注意到 $p \nmid a_n, p \mid a_i\,(0 \leq i \leq n-2), p^2 \nmid a_0$, 故由 (1) 可知 $f(x) = x^n + (p+2)x^{n-1} + p$ 有一个次数大于等于 $n-1$ 的不可约因子. 若此不可约因子的次数等于 n, 则 $f(x)$ 即为 $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式. 若此不可约因子的次数等于 $n-1$, 则 $f(x)$ 还有一个次数等于 1 的因子, 从而 $f(x)$ 有有理根. 由于 $f(x)$ 的有理根只能是 ± 1, $\pm p$, 但经计算可知 $f(1) \neq 0$, $f(-1) \neq 0$, $f(p) \neq 0$, $f(-p) \neq 0$, 矛盾. 因此, $f(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式.

§ 1.16 21 级高等代数 II 每周一题

[问题 2022S01] 设 $x_1,\cdots,x_n,\ y_1,\cdots,y_m$ 都是未定元,

$$f(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n,$$

$$g(x)=(x-y_1)\cdots(x-y_m)=x^m-\tau_1x^{m-1}+\cdots+(-1)^m\tau_m,$$

其中 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式, $\tau_1,\cdots,\tau_m$ 是 $y_1,\cdots,y_m$ 的初等对称多项式. 设 $R(f,g)$ 是多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式 (高代教材定义 5.10.1), 则 $R(f,g)$ 是关于 $x_1,\cdots,x_n,\ y_1,\cdots,y_m$ 的多元多项式. 请用行列式求值的 "求根法" (高代白皮书 § 1.8) 证明:

$$R(f,g)=\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^m(x_i-y_j).$$

注 由本题可得到高代教材定理 5.10.2 的另一证明.

[问题 2022S02] 求下列 $n+1$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} n & -n & & & \\ 1 & n-2 & 1-n & & \\ & 2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & n & -n \end{pmatrix}.$$

[问题 2022S03] 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$, 求证: $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 经过适当的排序后, 可满足 $\lambda_i+\mu_i=\lambda_i\mu_i\,(1\le i\le n)$. 特别地, $\boldsymbol{A}$ 是幂零阵当且仅当 $\boldsymbol{B}$ 是幂零阵.

[问题 2022S04] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, 则存在非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

可取到复数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 使得当 $0 < t \ll 1$ 时, $\lambda_1 + c_1 t$, $\lambda_2 + c_2 t$, $\cdots$, $\lambda_n + c_n t$ 互不相同. 令

$$\boldsymbol{A}_t = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 + c_1 t & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 + c_2 t & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n + c_n t \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

则当 $0 < t \ll 1$ 时, $\boldsymbol{A}_t$ 有 n 个不同的特征值 (于是可对角化), 并且 $\lim\limits_{t \to 0+} \boldsymbol{A}_t = \boldsymbol{A}$, 这就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的可对角化摄动. 请用上述摄动法 (不用 Kronecker 积) 求 $V = M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征值, 其中 $\boldsymbol{A} \in M_m(\mathbb{C})$ 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, $\boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征值为 $\mu_1, \cdots, \mu_n$:

(1) $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}$;

(2) $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}$.

[问题 2022S05] 求证下列三对角矩阵可对角化:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ n-1 & 0 & 2 & & & \\ & n-2 & 0 & 3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[问题 2022S06] 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是数域 $\mathbb{K}$ 上的 m, n 阶矩阵, 它们在复数域 $\mathbb{C}$ 中有公共的特征值. 证明: 存在非零矩阵 $\boldsymbol{C} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$.

[问题 2022S07] 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 其特征多项式等于极小多项式, 证明: 矩阵方程 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}$ 的解是 $\mathbb{K}$ 上的对称阵.

[问题 2022S08] 设 V 为 n 阶复方阵全体构成的线性空间, V 上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 定义为 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{A} \in V$. 证明: $\boldsymbol{\varphi}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

注　本题是第二届全国大学生数学竞赛决赛某道代数试题的推广.

[问题 2022S09] 设 V 为 n 阶复方阵全体构成的线性空间, V 上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 定义为 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{X}\boldsymbol{J}$, 其中 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_n(0)$ 是特征值为 0 的 n 阶 Jordan 块. 试求 $\boldsymbol{\varphi}$ 的 Jordan 标

准型.

[问题 2022S10] 设 a 为实数, 求下列 n 阶实对称阵的正负惯性指数:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^2 & a & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

[问题 2022S11] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶正定实对称阵, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为 n 阶半正定实对称阵且主对角元全大于零, 证明: Hadamard 乘积 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=(a_{ij}b_{ij})$ 是正定实对称阵.

注 本题是高代白皮书例 8.43 的推广.

[问题 2022S12] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶半正定实对称阵, 满足 $|\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}|=0$. 求证: 存在 n 维非零实列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

注 本题是复旦大学数学学院 21 级高等代数 I 期末考试第八大题的推广.

[问题 2022S13] 设实二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 未必对称且 $|\boldsymbol{A}|<0$. 求证: 存在实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 使得 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)<0$.

注 本题是高代白皮书例 8.23 的推广.

[问题 2022S14] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶半正定实对称阵, 求证: $\dfrac{1}{n}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\geq|\boldsymbol{A}|^{\frac{1}{n}}|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{n}}$, 并求等号成立的充要条件.

[问题 2022S15] 证明: n 维欧氏空间 V 中, 两两夹角大于直角的向量个数至多是 $n+1$ 个, 并举例说明能取到 $n+1$ 个这样的向量.

[问题 2022S16] 请将 [问题 2021A06] 中的一一对应推广到 n 阶酉阵和 n 阶斜 Hermite 阵的情形, 并用酉阵和斜 Hermite 阵的酉相似标准型理论说明这个一一对应的本质.

[问题 2022S17] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实方阵, 其中 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值都是正实数, 并且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}'=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$. 证明:

(1) $\boldsymbol{B}$ 必为对称阵;

(2) $\boldsymbol{A}$ 为对称阵当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, 也当且仅当 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}^2)=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}')$;

(3) $|\boldsymbol{B}|\geq|\boldsymbol{A}|$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注 本题是复旦大学数学学院 20 级高代 I 期中考试第七大题的推广.

[问题 2022S18] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵, 证明: $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})^2 \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$, 并求等号成立的充要条件.

♣ ♣ ♣

§ 1.16 解答或提示

[问题 2022S01] 首先注意到在结式 $R(f,g)$ 的前 m 行元素中, 未定元 x_i 的最高次数都是 1 且与 y_j 无关; 后 n 行元素中, 未定元 y_j 的最高次数都是 1 且与 x_i 无关, 故在 $R(f,g)$ 的表达式中, x_i 的最高次数为 m, y_j 的最高次数为 n. 其次对任意的 $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, 若 $x_i = y_j$, 则 $f(x), g(x)$ 有公共根, 于是由结式的性质可知 $R(f,g) = 0$, 再由高代白皮书 § 1.8 求根法的原理可知 $R(f,g) = c\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m}(x_i - y_j)$, 其中 c 为常数. 最后将 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 看作主未定元, 并将其排序如下: $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$, 则 $R(f,g)$ 的首项出现在右上角 m 阶子式的主对角线上, 从而由 Laplace 展开可得 $R(f,g)$ 的首项为 $\sigma_n^m = (x_1x_2\cdots x_n)^m$, 于是 $c = 1$. 也可以代入一些特殊值计算 $R(f,g)$, 从而得到 $c = 1$.

[问题 2022S02] 由 [问题 2016A01] 可知 $|\lambda \boldsymbol{I}_{n+1} - \boldsymbol{A}| = \lambda^{n+1}$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零. 求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})'$, 由第一个方程可解得 $x_1 = x_2$, 由第二个方程可解得 $x_2 = x_3$, $\cdots$, 由第 n 个方程可解得 $x_n = x_{n+1}$, 于是特征值 0 的特征向量为 $k(1, 1, \cdots, 1)'$, 其中 $k \neq 0$.

[问题 2022S03] 由高代白皮书例 2.21 可知 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 再由高代白皮书例 6.40 可知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可同时上三角化, 即存在非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP} = \begin{pmatrix} \mu_1 & * & \cdots & * \\ & \mu_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

比较等式 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP} = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})$ 两边矩阵的主对角元即得 $\lambda_i + \mu_i = \lambda_i\mu_i\,(1 \leq i \leq n)$. $\boldsymbol{A}$ 为幂零阵当且仅当所有的 $\lambda_i = 0$, 由上式可知这当且仅当所有的 $\mu_i = 0$, 这也当且仅当 $\boldsymbol{B}$ 为幂零阵.

[问题 2022S04] 先证明一个结论. 设 λ_0 是 m 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量, 即 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}$. 设 μ_0 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值, 则它也是 $\boldsymbol{B}'$ 的特征值, 再设 $\boldsymbol{\beta}$ 是

对应的特征向量, 即 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\beta}=\mu_0\boldsymbol{\beta}$. 令 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$, 则 $\boldsymbol{X}_0\neq\boldsymbol{O}$ 且满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\beta})'=\lambda_0\mu_0\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'=\lambda_0\mu_0\boldsymbol{X}_0$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0-\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\beta})'=(\lambda_0-\mu_0)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'=(\lambda_0-\mu_0)\boldsymbol{X}_0.$$

(1) 取复数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$, $d_1,d_2,\cdots,d_n$, 使得当 $0<t\ll 1$ 时, $(\lambda_i+c_it)(\mu_j+d_it)\,(1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n)$ 互不相同. 设 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别为 m,n 阶非异阵, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\mu_1 & * & \cdots & * \\ & \mu_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mu_n\end{pmatrix},$$

考虑矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的摄动

$$\boldsymbol{A}_t=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1+c_1t & * & \cdots & * \\ & \lambda_2+c_2t & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_m+c_mt\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$
$$\boldsymbol{B}_t=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\mu_1+d_1t & * & \cdots & * \\ & \mu_2+d_2t & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mu_n+d_nt\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1},$$

则由一开始的讨论以及假设可知, 当 $0<t\ll 1$ 时, $(\lambda_i+c_it)(\mu_j+d_it)\,(1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n)$ 是线性变换 $\boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}_t\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_t$ 的全体特征值, 于是

$$|\lambda\boldsymbol{I}_V-\boldsymbol{\varphi}_t|=\prod_{i=1}^m\prod_{j=1}^n\big(\lambda-(\lambda_i+c_it)(\mu_j+d_it)\big).$$

上式两边都是关于 t 的连续函数, 令 $t\to 0+$, 取极限可得

$$|\lambda\boldsymbol{I}_V-\boldsymbol{\varphi}|=\prod_{i=1}^m\prod_{j=1}^n(\lambda-\lambda_i\mu_j),$$

即 $\boldsymbol{\varphi}$ 的全体特征值为 $\lambda_i\mu_j\,(1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n)$.

(2) $\boldsymbol{\varphi}$ 的全体特征值为 $\lambda_i-\mu_j\,(1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n)$. 解法类似, 细节留给读者完成.

[问题 2022S05] 由 [问题 2018A04] 可得 $\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}=(\lambda-n+1)(\lambda-n+3)\cdots(\lambda+n-1)$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值 $n-1,n-3,\cdots,-(n-1)$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

[问题 2022S06] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_m(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$, 则存在非零矩阵 $\boldsymbol{C}=(x_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, 使得 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CB}$ 等价于下列线性方程组在 $\mathbb{K}$ 中存在非零解:

$$\sum_{k=1}^{m}a_{ik}x_{kj}-\sum_{l=1}^{n}x_{il}b_{lj}=0,\quad 1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n. \tag{1.16.1}$$

设齐次线性方程组 (1.16.1) 的系数矩阵为 $\mathbb{K}$ 上的 mn 阶方阵 $\boldsymbol{M}$. 由高代白皮书例 6.91 的证明可知, 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 在 $\mathbb{C}$ 中有公共的特征值, 则存在非零矩阵 $\boldsymbol{C}\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, 使得 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CB}$, 这等价于方程组 (1.16.1) 在 $\mathbb{C}$ 中存在非零解, 于是由线性方程组的求解理论可知 $|\boldsymbol{M}|=0$. 再次利用线性方程组的求解理论可知, 方程组 (1.16.1) 在 $\mathbb{K}$ 中存在非零解. 更多类似的题目可参考教学论文 [18]. 本题还可用矩阵的 Kronecker 积来证明, 请参考高代白皮书例 6.91 的证法 2.

[问题 2022S07] 设 $f(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 也是 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式, 则由有理标准型理论可知, 存在非异阵 $\boldsymbol{P}\in M_n(\mathbb{K})$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}(f(x))$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准型 (由一个友阵 $\boldsymbol{C}(f(x))$ 构成). 由 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}$ 可得 $(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{XP})\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{XP})$, 再由 [问题 2021A03] 可得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{XP}=\boldsymbol{Y}$ 为对称阵, 从而 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{P}^{-1})'\boldsymbol{Y}\boldsymbol{P}^{-1}$ 也为对称阵.

[问题 2022S08] 参考高代白皮书例 6.58 及其延拓.

[问题 2022S09] 设 $\boldsymbol{E}_{ij}\,(1\leq i,j\leq n)$ 为 n 阶基础矩阵, 为书写方便起见, 约定 $\boldsymbol{E}_{0,j}=\boldsymbol{O}\,(1\leq j\leq n)$, $\boldsymbol{E}_{i,n+1}=\boldsymbol{O}\,(1\leq i\leq n)$, 经简单的计算可得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{E}_{ij})=\boldsymbol{JE}_{ij}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{E}_{i-1,j+1}\,(1\leq i,j\leq n)$. 我们可将 $M_n(\mathbb{C})$ 的这组基 $\boldsymbol{E}_{ij}\,(1\leq i,j\leq n)$ 适当地调整顺序, 构成 $\boldsymbol{\varphi}$ 的所有 Jordan 块对应的循环子空间的循环轨道:

轨道 1 $\boldsymbol{J}_1(0):\boldsymbol{E}_{11}\to\boldsymbol{O}$;

轨道 2 $\boldsymbol{J}_2(0):\boldsymbol{E}_{21}\to\boldsymbol{E}_{12}\to\boldsymbol{O}$;

轨道 3 $\boldsymbol{J}_3(0):\boldsymbol{E}_{31}\to\boldsymbol{E}_{22}\to\boldsymbol{E}_{13}\to\boldsymbol{O}$;

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

轨道 $n-1$ $\boldsymbol{J}_{n-1}(0):\boldsymbol{E}_{n-1,1}\to\cdots\to\boldsymbol{E}_{1,n-1}\to\boldsymbol{O}$;

轨道 n $\boldsymbol{J}_n(0):\boldsymbol{E}_{n1}\to\boldsymbol{E}_{n-1,2}\to\cdots\to\boldsymbol{E}_{1n}\to\boldsymbol{O}$;

轨道 $n+1$　$\boldsymbol{J}_{n-1}(0):\boldsymbol{E}_{n2}\to\boldsymbol{E}_{n-1,3}\cdots\to\boldsymbol{E}_{2n}\to\boldsymbol{O}$;

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

轨道 $2n-3$　$\boldsymbol{J}_3(0):\boldsymbol{E}_{n,n-2}\to\boldsymbol{E}_{n-1,n-1}\to\boldsymbol{E}_{n-2,n}\to\boldsymbol{O}$;

轨道 $2n-2$　$\boldsymbol{J}_2(0):\boldsymbol{E}_{n,n-1}\to\boldsymbol{E}_{n-1,n}\to\boldsymbol{O}$;

轨道 $2n-1$　$\boldsymbol{J}_1(0):\boldsymbol{E}_{nn}\to\boldsymbol{O}$.

因此, $\boldsymbol{\varphi}$ 的 Jordan 标准型为

$$\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_1(0),\boldsymbol{J}_2(0),\cdots,\boldsymbol{J}_{n-1}(0),\boldsymbol{J}_n(0),\boldsymbol{J}_{n-1}(0),\cdots,\boldsymbol{J}_2(0),\boldsymbol{J}_1(0)\}.$$

也可以利用矩阵的 Kronecker 积来求解. 注意到 $\boldsymbol{\varphi}^k(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{X}\boldsymbol{J}^k$, 故由高代白皮书例 6.102 可知, $\boldsymbol{\varphi}^k$ 在基础矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 构成的一组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{J}^k\otimes(\boldsymbol{J}^k)'$, 再由高代白皮书例 6.99 可知, 对任意的 $1\leq k\leq n$, 有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi}^k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{J}^k\otimes(\boldsymbol{J}^k)')=\mathrm{r}(\boldsymbol{J}^k)\,\mathrm{r}((\boldsymbol{J}^k)')=(n-k)^2$. 注意到 $\boldsymbol{\varphi}^n=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{\varphi}$ 是幂零线性变换, 从而其特征值全为零. 最后由高代白皮书例 7.52 可知, 在 $\boldsymbol{\varphi}$ 的 Jordan 标准型中, $\boldsymbol{J}_k(0)\,(1\leq k\leq n-1)$ 的个数等于 $(n-k+1)^2+(n-k-1)^2-2(n-k)^2=2$; $\boldsymbol{J}_n(0)$ 的个数等于 1, 由此可得 $\boldsymbol{\varphi}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_1(0),\boldsymbol{J}_1(0),\boldsymbol{J}_2(0),\boldsymbol{J}_2(0),\cdots,\boldsymbol{J}_{n-1}(0),\boldsymbol{J}_{n-1}(0),\boldsymbol{J}_n(0)\}$.

[**问题 2022S10**] 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i-1$ 行乘以 $-a$ 加到第 i 行上, 再将第 $i-1$ 列乘以 $-a$ 加到第 i 列上 $(i=n,\cdots,2)$, 最后可得一个对角阵 $\mathrm{diag}\{1,1-a^2,\cdots,1-a^2\}$, 于是

(1) 若 $a=\pm1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 0;

(2) 若 $-1<a<1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n, 负惯性指数为 0;

(3) 若 $a<-1$ 或 $a>1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 $n-1$.

[**问题 2022S11**] 因为 $\boldsymbol{B}$ 是半正定阵, 故存在实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$. 设 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$, 则 $b_{ij}=\sum\limits_{k=1}^n c_{ki}c_{kj}$. 作二次型

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}&=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^n\Big(\sum_{k=1}^n a_{ij}(c_{ki}c_{kj})x_ix_j\Big)\\&=\sum_{k=1}^n\Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(c_{ki}x_i)(c_{kj}x_j)\Big)=\sum_{k=1}^n\boldsymbol{y}_k'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{y}_k=(c_{k1}x_1,c_{k2}x_2,\cdots,c_{kn}x_n)'$. 当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时, 不妨设某个分量 $x_s\neq0$. 由于 $0<b_{ss}=\sum\limits_{k=1}^n c_{ks}^2$, 故存在某个 $c_{rs}\neq0$, 于是 $\boldsymbol{y}_r$ 有一个分量 $c_{rs}x_s\neq0$, 从而 $\boldsymbol{y}_r\neq\boldsymbol{0}$. 因此由 $\boldsymbol{A}$ 的正定性可得 $f(\boldsymbol{x})>0$, 于是 f 是正定型, 从而 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 是正定阵.

[问题 2022S12] 参考高代白皮书例 8.73.

[问题 2022S13] 参考高代白皮书例 8.23 的延拓 (第 471 页).

[问题 2022S14] 参考高代白皮书例 8.69.

[问题 2022S15] 参考高代白皮书例 9.6.

[问题 2022S16] 参考高代白皮书例 9.102.

[问题 2022S17] 参考高代白皮书例 9.116.

[问题 2022S18] 参考高代白皮书例 9.136.

第二章　复旦大学高等代数期末考试大题

§ 2.1　13 级高等代数期末考试大题

[13 级高代 I 期末 07] 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶非异阵, 证明: 对任意的对角阵 $\boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 均为对角阵的充分必要条件是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_r,$$

其中 $\boldsymbol{P}_i\,(1 \leq i \leq r)$ 均为第一类初等阵 (即对换 $\boldsymbol{I}_n$ 的某两行) 或第二类初等阵 (即非零常数乘以 $\boldsymbol{I}_n$ 的某一行).

[13 级高代 I 期末 08] 设 V 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 为 V 上的线性变换, 且存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $V = L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\alpha}), \cdots)$.

(1) 证明: $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \boldsymbol{\varphi}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})\}$ 为 V 的一组基.

(2) 设 $\boldsymbol{\varphi}^n(\boldsymbol{\alpha}) = -a_0\boldsymbol{\alpha} - a_1\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}) - \cdots - a_{n-1}\boldsymbol{\varphi}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$, 令

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{K}[x].$$

证明: 如果 $f(x)$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上至少有两个互异的首一不可约因式, 则存在非零向量 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$, 使得

$$V = L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\beta}), \cdots) \oplus L(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\gamma}), \cdots).$$

[13 级高代 II 期末 07] 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称阵, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 半正定, 则存在正交阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0\}, \quad \boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\{0, \cdots, 0, \mu_{r+1}, \cdots, \mu_n\}.$$

[13 级高代 II 期末 08] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵, $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$, 其中 $0 \le \lambda_i \le 1\,(1 \le i \le n)$. 证明:

$$|\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}| \ge (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_n).$$

♣ ♣ ♣

§ 2.1 解答或提示

[13 级高代 I 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3554128.html.

[13 级高代 I 期末 08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3554225.html.

[13 级高代 II 期末 07] 参考高代白皮书例 9.70.

[13 级高代 II 期末 08] 参考高代白皮书例 9.133.

§ 2.2　14 级高等代数期末考试大题

[14 级高代 I 期末 07] 设 V 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $S=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m\}$ 为 V 中的向量组, 定义集合

$$R_S=\Big\{(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in\mathbb{K}_m \mid a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_m\boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{0}\Big\}.$$

再取 V 中的向量组 $T=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m\}$. 证明:

(1) R_S 是 $\mathbb{K}_m$ 的线性子空间;

(2) 存在线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{u}_i\,(1\leq i\leq m)$ 的充分必要条件是 $R_S\subseteq R_T$;

(3) 存在线性自同构 $\boldsymbol{\varphi}$ 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{u}_i\,(1\leq i\leq m)$ 的充分必要条件是 $R_S=R_T$.

[14 级高代 I 期末 08] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵, 满足 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 证明: 存在 m 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$, n 阶非异阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{PBQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

[14 级高代 II 期末 07] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2)$, 求证: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

[14 级高代 II 期末 08] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶半正定实对称阵, 求证: $\boldsymbol{AB}$ 可对角化.

♣ ♣ ♣

§ 2.2 解答或提示

[14 级高代 I 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4248239.html, 或高代白皮书第 4 章解答题 14.

[14 级高代 I 期末 08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/4248435.html, 或高代白皮书第 4 章解答题 15.

[14 级高代 II 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/5163914.html, 或高代白皮书例 7.68.

[14 级高代 II 期末 08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/5165247.html, 或高代白皮书例 9.73.

§ 2.3　15 级高等代数期末考试大题

[15 级高代 I 期末 07] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $m\times n$, $p\times q$ 和 $m\times q$ 矩阵, 证明:

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$$

成立的充分必要条件是矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{YB}=\boldsymbol{C}$ 有解, 其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分别为 $n\times q$ 和 $m\times p$ 未知矩阵.

[15 级高代 I 期末 08] 设 V 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 为 V 上的线性变换. 子空间 $C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha})=L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots)$ 称为 $\boldsymbol{\varphi}$ 关于 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的循环子空间. 若非零多项式 $f(x)\in\mathbb{K}[x]$ 满足 $f(\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$, 则称 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}$ 处的零化多项式.

(1) 证明: 对 V 中任一非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 必存在 $\boldsymbol{\varphi}$ 在向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 处的零化多项式.

(2) 设 $V=C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}_1)\oplus C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}_2)\oplus\cdots\oplus C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}_m)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 中的非零向量, $f_i(x)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 处的零化多项式. 证明: 若 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式, 则 $\boldsymbol{\varphi}$ 的任一不变子空间必为 $\bigoplus\limits_{i\in I}C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}_i)$ 的形式, 其中 I 是 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的子集 (注: I 为空集时对应于零子空间).

[15 级高代 II 期末 06] 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 复系数多项式 $g(\lambda)$ 满足 $(f(g(\lambda)),g'(\lambda))=1$. 证明: 存在 n 阶复方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $g(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}$.

[15 级高代 II 期末 07] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $m\times m$, $n\times n$, $m\times n$ 复矩阵, 矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

可对角化. 求证: 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$ 必有解.

[15 级高代 II 期末 08] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正定实对称阵, 其算术平方根记为 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$. 证明: 若 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 为半正定阵, 则 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}-\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$ 也是半正定阵.

♣ ♣ ♣

§ 2.3 解答或提示

[15 级高代 I 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/5165464.html, 或高代白皮书例 3.90.

[**15 级高代 I 期末 08**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/5166937.html.

[**15 级高代 II 期末 06**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/5629625.html, 或高代白皮书第 7 章解答题 12.

[**15 级高代 II 期末 07**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/5629102.html.

[**15 级高代 II 期末 08**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/5628881.html, 或高代白皮书例 9.79.

§ 2.4 16 级高等代数期末考试大题

[**16 级高代 I 期末 06**] 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 $2n$ 阶反对称阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $2n$ 维列向量, x 为未定元, 证明:

$$|\boldsymbol{A}+x\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'|=|\boldsymbol{A}|.$$

[**16 级高代 I 期末 07**] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 实矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 证明:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\geq\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\},$$

并且等号成立的充分必要条件是存在 m 阶方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$.

[**16 级高代 I 期末 08**] 设 V 为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, V_1,V_2 分别是 V 的 n 维, m 维子空间, 使得 $V_1\not\subseteq V_2$. 设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 为 V_1 的一组基, 证明: 可从这组基中选取固定的几个向量, 使得它们与 V_2 的任一组基 $\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_m\}$ 拼在一起均可成为 V_1+V_2 的一组基.

[**16 级高代 II 期末 06**] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶半正定实对称阵, $\boldsymbol{S}$ 为 n 阶实反对称阵, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 证明: $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}|>0$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{S})=n$.

[**16 级高代 II 期末 07**] 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 复系数多项式 $g(\lambda)$ 满足 $(f(\lambda),g'(\lambda))=1$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $g(\boldsymbol{A})$ 可对角化.

[**16 级高代 II 期末 08**] 设 φ 是欧氏空间 V 上的线性算子, $g(\lambda)$ 是 φ 的极小多项式. 证明: φ 是正规算子的充要条件是, 对 $g(\lambda)$ 的任一首一不可约因式 $g_i(\lambda)$, 以下两个条件都成立:

(1) $V=\mathrm{Ker}\,g_i(\boldsymbol{\varphi})\perp\mathrm{Im}\,g_i(\boldsymbol{\varphi})$;

(2) 任取 $\mathrm{Ker}\,g_i(\boldsymbol{\varphi})$ 中两个正交的向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, 则 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha})$ 与 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\beta})$ 也正交.

♣ ♣ ♣

§ 2.4 解答或提示

[**16 级高代 I 期末 06**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/6268962.html.

[**16 级高代 I 期末 07**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/6268825.html.

[**16 级高代 I 期末 08**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/6268175.html.

[16 级高代 II 期末 06] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/7123731.html, 或高代白皮书例 9.71.

[16 级高代 II 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/7123084.html, 或高代白皮书例 7.39.

[16 级高代 II 期末 08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/7119343.html, 或高代白皮书例 9.111.

§ 2.5　17 级高等代数期末考试大题

[17 级高代 I 期末 06] 设 $M_n(\mathbb{K})$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵全体构成的线性空间, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{K})$, $M_n(\mathbb{K})$ 上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 定义为 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AXB}$. 证明: $\boldsymbol{\varphi}$ 是幂零线性变换 (即存在正整数 k, 使得 $\boldsymbol{\varphi}^k=\boldsymbol{0}$) 的充分必要条件为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中至少有一个是幂零阵.

[17 级高代 I 期末 07] 设 U,V,W 均为数域 $\mathbb{K}$ 上的非零线性空间, $\boldsymbol{\varphi}:V\to U$ 和 $\boldsymbol{\psi}:U\to W$ 是线性映射, 满足 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\psi\varphi})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi})$. 证明: 存在线性映射 $\boldsymbol{\xi}:W\to U$, 使得

$$\boldsymbol{\xi\psi\varphi}=\boldsymbol{\varphi}.$$

[17 级高代 I 期末 08] 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AA}'=c\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$, 其中 c 为非零实数. 证明: 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r\geq 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个 r 阶主子式非零.

[17 级高代 II 期末 06] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶幂零阵 (即存在正整数 k, 使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$), 证明: $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ 与 $\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}$ 相似.

[17 级高代 II 期末 07] 设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 为 n 阶实对称阵, 其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为正定阵, 并且对任意的 $2\leq i<j\leq m$, $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_j$ 都是对称阵. 证明: 存在非异实方阵 $\boldsymbol{C}$, 使得

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_n,\ \ \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}\{\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{in}\},\ 2\leq i\leq m,$$

其中 $\{\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{in}\}$ 是 $\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_i$ 的全体特征值.

[17 级高代 II 期末 08] 设 m 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体不同特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$, 对应的几何重数分别为 $t_1,\cdots,t_k$; n 阶复方阵 $\boldsymbol{B}$ 的全体不同特征值为 $\mu_1,\cdots,\mu_r$, 对应的几何重数分别为 $s_1,\cdots,s_r$. 设 λ,μ 为复数, 若 $\lambda=\mu$, 则定义 $\delta_{\lambda,\mu}=1$; 若 $\lambda\neq\mu$, 则定义 $\delta_{\lambda,\mu}=0$. 证明: 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XB}$ 的解空间的维数大于等于 $\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{r}t_is_j\delta_{\lambda_i,\mu_j}$, 并且上述不等式取等号的充分必要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 无公共特征值或者对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的任一公共特征值 λ_0, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中至少有一个矩阵关于特征值 λ_0 有完全的特征向量系.

♣ ♣ ♣

§ 2.5 解答或提示

[17 级高代 I 期末 06] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/8335634.html, 或高代白皮书例 6.104.

[17 级高代 I 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/8334072.html.

[17 级高代 I 期末 08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/8328951.html.

[17 级高代 II 期末 06] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/9284947.html, 或高代白皮书例 7.75.

[17 级高代 II 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/9284936.html, 或高代白皮书例 9.127.

[17 级高代 II 期末 08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/9284893.html.

§ 2.6　18 级高等代数期末考试大题

[18 级高代 I 期末 07] 设 V 为 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}$ 是 V 上的线性变换, 满足 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\varphi}$. 证明: $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}\cap\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\psi}=0$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\varphi})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\psi})$.

[18 级高代 I 期末 08] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实方阵, 使得 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}$ 是反对称阵. 证明:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B})\leq\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),$$

并确定等号成立的充分必要条件.

[18 级高代 II 期末 06] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值的充要条件是, 对 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_0 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}' & 0\end{pmatrix}$$

均非异.

[18 级高代 II 期末 07] 证明: 存在 71 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 使得

$$\boldsymbol{A}^{70}+\boldsymbol{A}^{69}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_{71}=\begin{pmatrix}2019 & 2018 & \cdots & \cdots & 1949\\ & 2019 & 2018 & \cdots & 1950\\ & & 2019 & \cdots & 1951\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & \ddots & 2018\\ & & & & 2019\end{pmatrix}.$$

[18 级高代 II 期末 08] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶半正定实对称阵, 使得 $\boldsymbol{ABC}$ 是对称阵, 即满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{CBA}$. 证明: $\boldsymbol{ABC}$ 也是半正定阵.

♣ ♣ ♣

§ 2.6 解答或提示

[18 级高代 I 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/10285893.html.

[18 级高代 I 期末 08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/10284225.html.

[**18 级高代 II 期末 06**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/11137934.html, 或高代白皮书第 9 章解答题 13.

[**18 级高代 II 期末 07**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/11137734.html, 或高代白皮书例 7.76.

[**18 级高代 II 期末 08**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/11136078.html, 或高代白皮书例 9.84.

§ 2.7　19 级高等代数期末考试大题

[19 级高代 I 期末 06] 设 $n\,(n>1)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: 每行元素之和都等于 c, 并且 $|\boldsymbol{A}|=d\neq 0$. 试求 $\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式之和 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}$.

[19 级高代 I 期末 07] 设 V 为 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, $V=U\oplus W$, 其中 U,W 都是 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间. 证明:

(1) 对任意的正整数 k, $\boldsymbol{\varphi}^{-k}(U):=\{v\in V\mid \boldsymbol{\varphi}^k(v)\in U\}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}^k(W):=\{\boldsymbol{\varphi}^k(w)\mid w\in W\}$ 都是 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间;

(2) 存在正整数 m, 使得对任意的 $k\geq m$, $\boldsymbol{\varphi}^{-k}(U)=\boldsymbol{\varphi}^{-m}(U)$, $\boldsymbol{\varphi}^k(W)=\boldsymbol{\varphi}^m(W)$, 并且 $V=\boldsymbol{\varphi}^{-m}(U)\oplus\boldsymbol{\varphi}^m(W)$.

[19 级高代 I 期末 08] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n\,(n>1)$ 阶实对称阵, 满足: 每行元素之和都等于零, 并且非主对角元素都小于等于零. 设指标集 $\Gamma=\{1,2,\cdots,n\}$, 两个指标 $i\neq j$ 称为连通的, 如果存在一列指标 $i=i_1,i_2,\cdots,i_k=j$, 使得 $a_{i_1i_2}<0$, $a_{i_2i_3}<0$, $\cdots$, $a_{i_{k-1}i_k}<0$. 设指标集 Γ 分成 m 个连通分支 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_m$, 即同一连通分支内的不同指标相连通, 不同连通分支之间的指标不连通. 证明: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-m$.

[19 级高代 II 期末 07] 设数域 $\mathbb{K}$ 上的 $n\,(n\geq 2)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 且 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^*)=0$, 证明: $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

[19 级高代 II 期末 08] 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{M}$ 的全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $\boldsymbol{M}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{M})$ 定义为 $\rho(\boldsymbol{M})=\max\limits_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|$. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实方阵, 使得 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}'&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 为半正定实对称阵, 证明:

$$\rho(\boldsymbol{B})\leq\rho(\boldsymbol{A}).$$

♣ ♣ ♣

§ 2.7 解答或提示

[19 级高代 I 期末 06] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/12203661.html.

[19 级高代 I 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/12200725.html.

[19 级高代 I 期末 08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/12199562.html.

[19 级高代 II 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/13735237.html.

[**19 级高代 II 期末 08**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/13733836.html, 或高代白皮书例 9.57.

§ 2.8　20 级高等代数期末考试大题

[20 级高代 II 期末 07] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称阵, $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 n 阶半正定实对称阵, 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 为对称阵. 证明:

$$|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}|\leq|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}|,$$

并求等号成立的充要条件.

[20 级高代 II 期末 08] 设 $M_n(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵全体构成的线性空间, $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 定义为 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'$, 其中 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{C})$. 证明: $\boldsymbol{\varphi}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

♣ ♣ ♣

§ 2.8 解答或提示

[20 级高代 II 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/14975191.html, 或高代白皮书例 9.128.

[20 级高代 II 期末 08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/14975188.html.

§ 2.9 21 级高等代数期末考试大题

[21 级高代 I 期末 07] 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 $n\,(n>1)$ 阶方阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 记齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间为 $V_{\boldsymbol{A}}$, $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间为 $V_{\boldsymbol{A}^*}$. 证明: $\mathbb{K}^n=V_{\boldsymbol{A}}\oplus V_{\boldsymbol{A}^*}$ 成立的充要条件是 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^*)\neq 0$.

[21 级高代 I 期末 08] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 为 n 阶实对称阵, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实方阵, $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$, $d_i>0\,(1\leq i\leq n)$, 满足:

$$\begin{vmatrix}\mathrm{i}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D} & \mathrm{i}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{C}\end{vmatrix}=0,$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位. 证明: $|\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2|=0$.

[21 级高代 II 期末 06] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实正规阵, 求证: 存在特征值为 1 或 -1 的正交阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}'$.

[21 级高代 II 期末 07] 证明: 存在 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 使得

$$\sin\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2^n}\\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}}\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & \ddots & \frac{1}{4}\\ & & & & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

[21 级高代 II 期末 08] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定实对称阵, $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 n 阶实反对称阵, 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 为对称阵. 证明:

$$|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}|\leq|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}|,$$

并求等号成立的充分必要条件.

♣ ♣ ♣

§ 2.9 解答或提示

[21 级高代 I 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/15819300.html.

[21 级高代 I 期末 08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/15819282.html.

[21 级高代 II 期末 06] 参考高代白皮书例 9.117.

[21 级高代 II 期末 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/16698869.html.

[21 级高代 II 期末 08] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/16698652.html, 或高代白皮书例 9.130.

第三章　复旦大学高等代数期中考试大题

§ 3.1　08 级高等代数期中考试大题

[08 级高代 I 期中 05] 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是数域 $\mathbb{K}$ 中 n 个不同的数, 整数 k 满足 $1 \leq k \leq n-1$. 设

$$\mathrm{I}\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 0, \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{k-1} x_1 + \lambda_2^{k-1} x_2 + \cdots + \lambda_n^{k-1} x_n &= 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\begin{cases} \lambda_1^{k} x_1 + \lambda_2^{k} x_2 + \cdots + \lambda_n^{k} x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} x_1 + \lambda_2^{n-1} x_2 + \cdots + \lambda_n^{n-1} x_n &= 0, \end{cases}$$

并且线性方程组 I 的解空间为 V_1, 线性方程组 II 的解空间为 V_2, 证明: $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus V_2$.

[08 级高代 I 期中 06] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 $n\,(n \geq 2)$ 阶非异整数方阵, 满足对任意的 i, j, $|\boldsymbol{A}|$ 均可整除 a_{ij}, 证明: $|\boldsymbol{A}| = \pm 1$.

[08 级高代 I 期中 07] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{A}$, 其中 m 为正偶数, 证明: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n$ 是非异阵.

[08 级高代 II 期中 02] 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为多项式 $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ 的 n 个根, 证明: $x_2, \cdots, x_n$ 的任一对称多项式均可表示为 x_1 与 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的多项式.

[08 级高代 II 期中 03] 设 $\boldsymbol{A}$ 为有理数域上的 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda) = P_1(\lambda) P_2(\lambda) \cdots P_r(\lambda)$, 其中 $P_1(\lambda), P_2(\lambda), \cdots, P_r(\lambda)$ 为互异的首一不可约有理系数多项

式. 证明: $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式等于 $f(\lambda)$, 并且 $\boldsymbol{A}$ 复相似于对角阵.

[08 级高代 II 期中 06] 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都等于 1 或 -1, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 举例说明此命题的逆命题不成立.

[08 级高代 II 期中 07] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}^2 \\ \boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 为 $2n$ 阶复方阵. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 则 $\boldsymbol{B}$ 也可对角化.

♣♣♣

§ 3.1 解答或提示

[08 级高代 I 期中 05] 设方程组 I 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}_1$, 方程组 II 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}_2$, 则联立方程组 I、II 得到的新方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$, 解空间为 $V_1 \cap V_2$. 注意到 $|\boldsymbol{A}| = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解, 即 $V_1 \cap V_2 = 0$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是非异阵, 故也为行满秩阵, 于是 $\boldsymbol{A}_1$ 的 k 个行向量线性无关, $\boldsymbol{A}_2$ 的 $n-k$ 个行向量也线性无关, 因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) = k$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) = n-k$, 从而 $\dim V_1 = n-k$, $\dim V_2 = n-(n-k) = k$. 由于 $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = n-k+k = n = \dim \mathbb{K}^n$, 故 $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus V_2$.

[08 级高代 I 期中 06] 参考高代白皮书例 1.42.

[08 级高代 I 期中 07] 设 $m = 2k$, 则 $x^m - 1 = (x^2)^k - 1 = (x^2-1)((x^2)^{k-1} + \cdots + x^2 + 1) = (x+1)g(x)$, 其中 $g(x) = (x-1)(x^{2k-2} + \cdots + x^2 + 1)$. 将条件 $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{A}$ 整理为 $(\boldsymbol{A}^m - \boldsymbol{I}_n) - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n) = -2\boldsymbol{I}_n$, 于是 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)(g(\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{I}_n) = -2\boldsymbol{I}_n$, 从而 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n$ 是非异阵, 且 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)^{-1} = -\dfrac{1}{2}(g(\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{I}_n)$.

[08 级高代 II 期中 02] 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的初等对称多项式为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$, 则由韦达定理可知 $\sigma_i = (-1)^i a_i \, (1 \le i \le n)$. 由对称多项式基本定理, 我们只要证明 $x_2, \cdots, x_n$ 的初等对称多项式 $\tau_k \, (1 \le k \le n-1)$ 均可表示为 x_1 与 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的多项式即可. 注意到对任意的 $1 \le k \le n$, 成立

$$
\begin{aligned}
\sigma_k &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \\
&= x_1 \sum_{2 \le i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_2} \cdots x_{i_k} + \sum_{2 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = x_1 \tau_{k-1} + \tau_k,
\end{aligned}
$$

其中约定 $\tau_0=1$, $\tau_n=0$. 我们对 k 进行归纳. 当 $k=1$ 时, $\tau_1=\sigma_1-x_1=-a_1-x_1$, 结论成立. 假设 τ_{k-1} 可表示为 x_1 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式, 则 $\tau_k=\sigma_k-x_1\tau_{k-1}=(-1)^k a_k-x_1\tau_{k-1}$ 也可表示为 x_1 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式.

[**08 级高代 II 期中 03**] 参考高代白皮书例 7.16.

[**08 级高代 II 期中 06**] 参考高代白皮书例 7.8. 简单的反例为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_2(2),\boldsymbol{J}_2(\frac{1}{2})\}$. 进一步的讨论可参考教学论文 [8] 的命题 2.

[**08 级高代 II 期中 07**] 参考高代白皮书例 6.56, 采用类似的方法. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i\,(1\le i\le n)$. 注意到

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}^2\\ \boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_i\\ \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i\end{pmatrix}=(\lambda_i-\mathrm{i}\lambda_i^2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_i\\ \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}^2\\ \boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_i\\ -\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i\end{pmatrix}=(\lambda_i+\mathrm{i}\lambda_i^2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_i\\ -\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i\end{pmatrix}.$$

通过定义不难验证 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_i\\ \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_i\\ -\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_i\end{pmatrix}$ $(1\le i\le n)$ 是线性无关的, 因此 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}^2\\ \boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 有 $2n$ 个线性无关的特征向量, 从而可对角化.

§ 3.2 09 级高等代数期中考试大题

[09 级高代 I 期中 03] 令 $\sinh x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$. 证明: 当 $n \geq 3$ 时, 下列 n 阶行列式等于零:

$$\begin{vmatrix} \sinh(2\alpha_1) & \sinh(\alpha_1+\alpha_2) & \cdots & \sinh(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sinh(\alpha_2+\alpha_1) & \sinh(2\alpha_2) & \cdots & \sinh(\alpha_2+\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sinh(\alpha_n+\alpha_1) & \sinh(\alpha_n+\alpha_2) & \cdots & \sinh(2\alpha_n) \end{vmatrix} = 0.$$

[09 级高代 I 期中 05] 对于任意的实数 a, b, 计算下列 n 阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} ab+1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & ab+1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & ab+1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & ab+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & ab+1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & ab+1 \end{vmatrix}.$$

[09 级高代 I 期中 06] 我们称实数域上无穷次可微的函数为光滑函数. 实数域上光滑函数的全体构成的集合, 记为 $C^\infty(\mathbb{R})$. 对于任意的 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, 定义 f 的支撑集为 $\operatorname{Supp} f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$. 集合 $C^\infty(\mathbb{R})$ 中, 支撑集为有界集的函数全体构成 $C^\infty(\mathbb{R})$ 的子集, 记这个子集为 $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

(1) 证明: 集合 $C^\infty(\mathbb{R})$ 和集合 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 都是线性空间.

(2) 对于任意的正整数 n, 设 $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 并且有 $B_n \subset \operatorname{Supp} f_n \subset B_{n+1}$, 这里 $B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq n\}$. 求证: 集合 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 中, 任意有限个元素都线性无关.

[09 级高代 I 期中 07] 设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的 n 个子式:

$$|\boldsymbol{A}_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\ k = 1, 2, \cdots, n,$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式都不为零, 证明:

(1) 上 (下) 三角阵的乘积是上 (下) 三角阵, 可逆上 (下) 三角阵的逆阵是上 (下) 三角阵.

(2) 存在唯一的主对角元全为 1 的下三角阵 $\boldsymbol{L}$ 和可逆上三角阵 $\boldsymbol{U}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$.

[09 级高代 II 期中 02] 设 $f(x)=x^{n+1}-(x+1)^{2n+1}$. 证明: 对任意的非负整数 n, 结式 $R(x^2+x+1,f(x))\neq 0$.

[09 级高代 II 期中 05] 试求下列方阵的 Jordan 标准型, 其中 a,b 为参数:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a+2&1&0&0\\5&3&1&0\\7&6&b+4&1\end{pmatrix}.$$

[09 级高代 II 期中 06] 设 $\boldsymbol{A}$ 为有理数域上的 n 阶方阵, 其特征多项式为 $P_1(\lambda)\cdots P_k(\lambda)$, 其中 $P_i(\lambda)\,(1\leq i\leq k)$ 是有理数域上互异的首一不可约多项式. 证明: $\boldsymbol{A}$ 的有理标准型只有一个 Frobenius 块, 并且 $\boldsymbol{A}$ 复相似于对角阵.

[09 级高代 II 期中 07] 设 $\boldsymbol{N}$ 为复数域上的 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{N}^n=\boldsymbol{O}$ 但 $\boldsymbol{N}^{n-1}\neq\boldsymbol{O}$. 问: 是否存在正整数 $k>1$ 以及矩阵 $\boldsymbol{A}$, 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{N}$? 若存在, 请给出例子. 若不存在, 请给出证明.

♣ ♣ ♣

§ 3.2 解答或提示

[09 级高代 I 期中 03] 双曲正弦函数 $\sinh x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 与双曲余弦函数 $\cosh x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 满足 $\sinh(x+y)=\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)$. 由此公式可将原行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 分解为两个矩阵乘积的行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\left|\begin{pmatrix}\sinh(\alpha_1)&\cosh(\alpha_1)\\\sinh(\alpha_2)&\cosh(\alpha_2)\\\vdots&\vdots\\\sinh(\alpha_n)&\cosh(\alpha_n)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cosh(\alpha_1)&\cosh(\alpha_2)&\cdots&\cosh(\alpha_n)\\\sinh(\alpha_1)&\sinh(\alpha_2)&\cdots&\sinh(\alpha_n)\end{pmatrix}\right|.$$

再由 Cauchy-Binet 公式即得 $|\boldsymbol{A}|=0$.

[09 级高代 I 期中 05] 将原行列式的第一列拆分为 $(ab+1,b,0,\cdots,0)'+(0,0,\cdots,0,1)'$, 于是原行列式等于两个行列式之和. 第一个行列式是三对角行列式, 由高代白皮书例 1.14 可知, 其值为 $a^nb^n+\cdots+ab+1$; 第二个行列式按第一列展开后是一个下三角行列式, 主对角元全为 a, 于是其值为 $(-1)^{n-1}a^{n-1}$. 因此, 原行列式 $D_n=a^nb^n+\cdots+ab+1+(-1)^{n-1}a^{n-1}\,(n\geq 3)$, $D_2=a^2b^2+ab+1$, $D_1=ab+1$.

[09 级高代 I 期中 06] (1) 直接验证线性空间的 8 条公理. (2) 设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为实数, 使得 $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)=0$. 由条件 $B_i\subset \mathrm{Supp}f_i\subset B_{i+1}$ 可知, 存在 $x_n\in B_n$, 使得 $f_n(x_n)\neq 0$, $f_i(x_n)=0\,(1\leq i\leq n-1)$. 在上式中令 $x=x_n$, 即得 $c_n=0$. 不断这样做下去, 可得 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$, 于是 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关. 特别地, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中, 任意有限个元素都线性无关.

[09 级高代 I 期中 07] (1) 参考高代白皮书例 2.8. (2) 参考高代教材第八章复习题 2, 或 https://www.cnblogs.com/torsor/p/3762452.html.

[09 级高代 II 期中 02] 注意到 x^2+x+1 的两个根为 ω,ω^2, 其中 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 代入 $f(x)$ 计算可知 $f(\omega)\neq 0$, $f(\omega^2)\neq 0$, 于是 x^2+x+1 与 $f(x)$ 没有公共根, 从而结式 $R(x^2+x+1,f(x))\neq 0$.

[09 级高代 II 期中 05] 参考高代白皮书例 7.49.

[09 级高代 II 期中 06] 参考高代白皮书例 7.16.

[09 级高代 II 期中 07] 参考高代白皮书例 7.72 的注.

§ 3.3　10 级高等代数期中考试大题

[**10 级高代 I 期中 03**] 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是实对称阵, $\boldsymbol{C}$ 是实反对称阵, 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{C}^2$. 证明: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$.

[**10 级高代 I 期中 04**] 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个互不相同的实数. 证明: $\mathrm{e}^{a_1x},\mathrm{e}^{a_2x},\cdots,\mathrm{e}^{a_nx}$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

[**10 级高代 I 期中 05**] 下列矩阵称为 n 阶循环矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

证明: 由数域 $\mathbb{K}$ 上全体 n 阶循环矩阵构成的集合 W 是 $M_n(\mathbb{K})$ 的线性子空间, 并求 W 的维数.

[**10 级高代 I 期中 07**] 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 证明: $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{I}_n$ 当且仅当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=n$.

[**10 级高代 II 期中 04**] 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 a 为参数, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

[**10 级高代 II 期中 05**] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1 或 -1, 证明: $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

[**10 级高代 II 期中 06**] 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵, 其中 $m\le n$. 若 $\boldsymbol{AB}$ 可对角化且 $|\boldsymbol{AB}|\ne 0$, 证明: $\boldsymbol{BA}$ 也可对角化.

[**10 级高代 II 期中 07**] 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 若 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\mathbb{K}$ 上的分块对角矩阵, 其中每个分块的阶数都小于 n, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可约矩阵; 反之, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的不可约矩阵. 证明: $\boldsymbol{A}$ 在数域 $\mathbb{K}$ 上不可约当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式 $m(\lambda)$ 等

于 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$, 并且存在数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式 $p(\lambda)$ 和正整数 k, 使得 $m(\lambda)=p(\lambda)^k$.

♣♣♣

§ 3.3 解答或提示

[10 级高代 I 期中 03] 将条件改写为 $\boldsymbol{AA}'+\boldsymbol{BB}'+\boldsymbol{CC}'=\boldsymbol{O}$, 两边同时取迹, 由矩阵迹的正定性可得 $0=\mathrm{tr}(\boldsymbol{O})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AA}')+\mathrm{tr}(\boldsymbol{BB}')+\mathrm{tr}(\boldsymbol{CC}')\geq 0$, 从而 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AA}')=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BB}')=\mathrm{tr}(\boldsymbol{CC}')=0$, 再次由矩阵迹的正定性可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$.

[10 级高代 I 期中 04] 参考高代白皮书第 3 章解答题 2.

[10 级高代 I 期中 05] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/8848641.html.

[10 级高代 I 期中 07] 参考高代白皮书例 5.77.

[10 级高代 II 期中 04] 参考高代白皮书第 7 章解答题 10.

[10 级高代 II 期中 05] 参考高代白皮书例 7.8.

[10 级高代 II 期中 06] 参考高代白皮书例 6.72.

[10 级高代 II 期中 07] 参考教学论文 [12] 的例 2.

§ 3.4 11 级高等代数期中考试大题

[11 级高代 I 期中 02] 求 $n\,(n\geq 3)$ 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_1-\theta_2) & \cos(\theta_1-\theta_3) & \cdots & \cos(\theta_1-\theta_n) \\ \cos(\theta_2-\theta_1) & 1 & \cos(\theta_2-\theta_3) & \cdots & \cos(\theta_2-\theta_n) \\ \cos(\theta_3-\theta_1) & \cos(\theta_3-\theta_2) & 1 & \cdots & \cos(\theta_3-\theta_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\theta_n-\theta_1) & \cos(\theta_n-\theta_2) & \cos(\theta_n-\theta_3) & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

[11 级高代 I 期中 05] 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{2m}+\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$, 其中 m 为正整数. 证明: 对任意的实数 a, $\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{I}_n$ 都是非异阵.

[11 级高代 I 期中 06] 设 $1\leq k\leq n-1$, 在下面两个数域 $\mathbb{K}$ 上的线性方程组中, $\widehat{x}_i$ 表示 x_i 不出现在方程中:

$$\mathrm{I}\begin{cases} \widehat{x}_1+\cdots+x_k+x_{k+1}+\cdots+x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+\cdots+\widehat{x}_k+x_{k+1}+\cdots+x_n=0, \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\begin{cases} x_1+\cdots+x_k+\widehat{x}_{k+1}+\cdots+x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}+\cdots+\widehat{x}_n=0. \end{cases}$$

设方程组 I 的解空间为 V_1, 方程组 II 的解空间为 V_2. 求证: $\mathbb{K}^n=V_1\oplus V_2$.

[11 级高代 I 期中 07] 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 证明: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^n)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{n+1})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{n+2})=\cdots$.

[11 级高代 II 期中 04] 设 $\boldsymbol{B}$ 是复数域上的 n 阶幂零矩阵, 其幂零指数为 $\ell\geq 1$, 即 $\boldsymbol{B}^\ell=\boldsymbol{O}$, 但 $\boldsymbol{B}^{\ell-1}\neq\boldsymbol{O}$. 证明: $\ell\leq 1+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 并求出等号成立的充分必要条件.

[11 级高代 II 期中 05] 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{R}$ 相似于分块对角阵 $\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},1,\cdots,1\right\}$, 则称方阵 $\boldsymbol{R}$ 为反射阵. 证明: 任一对合方阵 $\boldsymbol{A}$ (即满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}_n$) 都可分解为有限个反射阵的乘积.

[11 级高代 II 期中 06] 设 n 阶可逆复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式的次数为 s, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 s 阶方阵, 其中 $b_{ij}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{i+j})$, $1\leq i,j\leq s$. 证明: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是

$\boldsymbol{B}$ 为非异阵.

[11 级高代 II 期中 07] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换. 若存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $V = L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\alpha}), \cdots)$, 则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{\varphi}$ 的循环向量. 证明: V 的每个非零向量都是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的循环向量的充分必要条件为 $\boldsymbol{\varphi}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式.

♣ ♣ ♣

§ 3.4 解答或提示

[11 级高代 I 期中 02] 参考高代白皮书例 2.58.

[11 级高代 I 期中 05] 注意到 $x^{2m} - a^{2m} = (x^2)^m - (a^2)^m$ 一定有因式 $x^2 - a^2$, 从而有因式 $x + a$, 故可设 $x^{2m} - a^{2m} = (x + a)g(x)$. 由假设 $\boldsymbol{A}^{2m} + \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{O}$ 可得 $-(a^{2m}+1)\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}^{2m} - a^{2m}\boldsymbol{I}_n = (\boldsymbol{A} + a\boldsymbol{I}_n)g(\boldsymbol{A})$. 由于对任意的实数 a, $a^{2m} + 1 > 0$, 故 $\boldsymbol{A} + a\boldsymbol{I}_n$ 都是非异阵, 且 $(\boldsymbol{A} + a\boldsymbol{I}_n)^{-1} = -\dfrac{1}{a^{2m}+1}g(\boldsymbol{A})$.

[11 级高代 I 期中 06] 设方程组 I 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}_1$, 方程组 II 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}_2$, 则联立方程组 I、II 得到的新方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$, 解空间为 $V_1 \cap V_2$. 利用求和法计算可得 $|\boldsymbol{A}| = (-1)^{n-1}(n-1) \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解, 即 $V_1 \cap V_2 = 0$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是非异阵, 故也为行满秩阵, 于是 $\boldsymbol{A}_1$ 的 k 个行向量线性无关, $\boldsymbol{A}_2$ 的 $n-k$ 个行向量也线性无关, 因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) = k$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2) = n-k$, 从而 $\dim V_1 = n-k$, $\dim V_2 = n-(n-k) = k$. 由于 $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = n-k+k = n = \dim \mathbb{K}^n$, 故 $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus V_2$.

[11 级高代 I 期中 07] 参考高代白皮书例 4.34.

[11 级高代 II 期中 04] 由假设可知幂零阵 $\boldsymbol{B}$ 的极小多项式为 λ^ℓ, 因此可设 $\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_1}(0), \cdots, \boldsymbol{J}_{r_k}(0)\}$, 其中 $r_k = \ell$. 于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{J}) = (r_1-1)+\cdots+(r_k-1) \geq \ell-1$, 从而 $\ell \leq 1+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 等号成立当且仅当 $r_1 = \cdots = r_{k-1} = 1$, 即当且仅当 $\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\{0, \cdots, 0, \boldsymbol{J}_\ell(0)\}$. 也可用有理标准型完全类似地讨论. 本题的推广可参考高代白皮书例 7.22.

[11 级高代 II 期中 05] 参考高代白皮书例 7.43.

[11 级高代 II 期中 06] 参考高代白皮书例 7.38.

[11 级高代 II 期中 07] 参考高代白皮书例 7.17.

§ 3.5　12 级高等代数期中考试大题

[12 级高代 I 期中 03] 设 n 阶行列式

$$D_k=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&0&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_{k-1}&1&x_{k+1}&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_{k-1}^2&2x_k&x_{k+1}^2&\cdots&x_n^2\\x_1^3&x_2^3&\cdots&x_{k-1}^3&3x_k^2&x_{k+1}^3&\cdots&x_n^3\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_{k-1}^{n-1}&(n-1)x_k^{n-2}&x_{k+1}^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix},\ 1\le k\le n.$$

试求 $\sum\limits_{k=1}^{n}D_k$ 的值.

[12 级高代 I 期中 05] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶上三角阵, 其主对角元 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 互不相同.

(1) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换, 即满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 证明 $\boldsymbol{B}$ 也是上三角阵.

(2) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad V=\{\boldsymbol{B}\in M_3(\mathbb{R})\mid \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\}.$$

证明 V 是 $M_3(\mathbb{R})$ 的子空间, 并求 V 的维数.

[12 级高代 I 期中 06] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n\,(n\ge 2)$ 阶方阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵, 试证明以下结论.

(1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=n$.

(2) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$, 且存在 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, 使得 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{\alpha\beta}$.

(3) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\le n-2$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=0$, 即 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$.

[12 级高代 I 期中 07] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, U 是 V 的子空间. 若 W 是 V 的子空间且满足 $V=U\oplus W$, 则称 W 为 U 在 V 中的补空间. 证明: 若 U 是 V 的非平凡子空间, 则 U 在 V 中的补空间有无限多个.

[12 级高代 II 期中 04] 设 λ_0 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\mathrm{diag}\{d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)\}$ 为 $\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 的法式. 证明: $\mathrm{r}(\lambda_0\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=r$ 当且仅当 $(\lambda-\lambda_0)\nmid d_r(\lambda)$ 但 $(\lambda-\lambda_0)\mid d_{r+1}(\lambda)$.

[12 级高代 II 期中 05] 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, $g(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{(f(\lambda),f'(\lambda))}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 在复数域上可对角化的充分必要条件是 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

[12 级高代 II 期中 06] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换. 证明: 存在空间的直和分解 $V=V_1\oplus V_2$, 使得 V_1,V_2 都是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的不变子空间, 且 $\boldsymbol{\varphi}|_{V_1}$ 是幂零线性变换, $\boldsymbol{\varphi}|_{V_2}$ 是可逆线性变换.

[12 级高代 II 期中 07] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非异复方阵, 证明: 对任意的正整数 m, 存在 n 阶复方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^m$.

♣ ♣ ♣

§ 3.5 解答或提示

[12 级高代 I 期中 03] 记 $D=\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$ 为 Vandermonde 行列式的值, 则由行列式的求导公式 (高代白皮书例 1.21) 并经简单计算可得 $D_k=\dfrac{\partial D}{\partial x_k}=D\sum\limits_{i\neq k}\dfrac{1}{x_k-x_i}$, 于是

$$\sum_{k=1}^n D_k=D\sum_{k=1}^n\sum_{i\neq k}\frac{1}{x_k-x_i}=D\sum_{1\leq i<k\leq n}(\frac{1}{x_k-x_i}+\frac{1}{x_i-x_k})=0.$$

[12 级高代 I 期中 05] (1) 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, 证明思路是依次比较乘积 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 两边的第 j 列 $(j=1,2,\cdots,n-1)$ 的第 (i,j) 元素 $(i=n,n-1,\cdots,j+1)$, 最后可得 $b_{ij}=0\,(i>j)$, 即 $\boldsymbol{B}$ 是上三角阵. 具体地, 注意到 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是主对角元互异的上三角阵, 故比较乘积 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 两边的第 $(n,1)$ 元素可得 $a_{nn}b_{n1}=a_{11}b_{n1}$, 于是 $b_{n1}=0$; 再比较乘积两边的第 $(n-1,1)$ 元素可得 $a_{n-1,n-1}b_{n-1,1}=a_{11}b_{n-1,1}$, 于是 $b_{n-1,1}=0$; $\cdots$; 最后比较乘积两边的第 $(2,1)$ 元素可得 $a_{22}b_{21}=a_{11}b_{21}$, 于是 $b_{21}=0$. 然后再依次比较乘积两边的第 $2,\cdots,n-1$ 列的元素即可得证.

(2) 容易验证 V 是 $M_3(\mathbb{R})$ 的子空间. 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in V$, 代入 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 经计算可得 $\boldsymbol{B}$ 具有如下形状:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{12}+b_{22}&b_{12}&b_{12}\\0&b_{22}&b_{23}\\0&0&b_{22}-b_{23}\end{pmatrix}=b_{22}\boldsymbol{I}_3+b_{12}\boldsymbol{C}+b_{23}\boldsymbol{D},$$

其中 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$. 容易验证 $\{\boldsymbol{I}_3,\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$ 线性无关, 从而是 V 的一组基, 于是 $\dim V=3$. 注意到 $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}^2$, 故 $\{\boldsymbol{I}_3,\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2\}$ 也是 V 的一组基. 本题高代 II 的证法可参考高代白皮书例 6.63 或例 7.26.

[**12 级高代 I 期中 06**] (1) 参考高代白皮书例 2.37. (2) 和 (3) 参考高代白皮书例 3.81. 也可以利用相抵标准型理论直接证明本题.

[**12 级高代 I 期中 07**] 设 $\dim V=n$, $\dim U=m$, 则 U 是 V 的非平凡子空间意味着 $m\geq 1$ 且 $n-m\geq 1$. 任取 U 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m\}$, 并将其扩张为 V 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{e}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$. 令 $W_t=L(t\boldsymbol{e}_m+\boldsymbol{e}_{m+1},\boldsymbol{e}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{e}_n)$, 其中 $t\in\mathbb{K}$, 则由 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m,t\boldsymbol{e}_m+\boldsymbol{e}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ 仍为 V 的一组基可知 $V=U\oplus W_t$, 即 W_t 是 U 的补空间. 我们断言: 若 $t\neq s$, 则 $W_t\neq W_s$. 用反证法, 若 $W_t=W_s$, 则由 $t\boldsymbol{e}_m+\boldsymbol{e}_{m+1}\in W_s$ 可知, $t\boldsymbol{e}_m+\boldsymbol{e}_{m+1}=c_{m+1}(s\boldsymbol{e}_m+\boldsymbol{e}_{m+1})+\cdots+c_n\boldsymbol{e}_n$, 从而 $(c_{m+1}s-t)\boldsymbol{e}_m+(c_{m+1}-1)\boldsymbol{e}_{m+1}+\cdots+c_n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{0}$, 于是 $c_{m+1}s-t=c_{m+1}-1=\cdots=c_n=0$. 由此可得 $s=t$, 矛盾. 因此, $\{W_t,\,t\in\mathbb{K}\}$ 是 U 的无限多个补空间.

[**12 级高代 II 期中 04**] 参考高代白皮书例 7.44.

[**12 级高代 II 期中 05**] 参考高代白皮书例 7.38 之前的说明.

[**12 级高代 II 期中 06**] 参考高代白皮书例 7.93 的几何版本.

[**12 级高代 II 期中 07**] 参考高代白皮书例 7.72.

§ 3.6 13 级高等代数期中考试大题

[13 级高代 I 期中 03] 证明: 当 $n \geq 2$ 时, 下列等式成立:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ic_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_id_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_id_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_ic_i\right) = \sum_{1\leq i<j\leq n}(a_ib_j - a_jb_i)(c_id_j - c_jd_i).$$

[13 级高代 I 期中 04] 设 $\mathbb{K}^n$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维列向量空间, 任取 $\mathbb{K}^n$ 中 $p+1$ 个列向量 $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_p$, 证明: 存在正整数 m 和 $\mathbb{K}$ 上的 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以及 m 维列向量 $\boldsymbol{\beta}$, 使得线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的所有解都可以表示为 $\boldsymbol{\gamma}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_p\boldsymbol{\eta}_p$, 其中 $k_1,\cdots,k_p\in\mathbb{K}$.

[13 级高代 I 期中 05] 设 $P_0(x)=1$, $P_k(x)=x^k+a_{k,1}x^{k-1}+\cdots+a_{k,k}$ 为 k 次实系数多项式, 其中 $1\leq k\leq n-1$. 对给定的正值函数 $w(x)>0$, 定义函数 $K(x,y)=\sqrt{w(x)w(y)}\sum\limits_{k=0}^{n-1}P_k(x)P_k(y)$. 证明:

(1) n 阶方阵 $(P_{i-1}(x_j))_{n\times n}$ 的行列式等于 $\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$;

(2) 对任意的正值函数 $f(x)>0$, 如下等式成立:

$$\det\left(\frac{f(x_i)}{f(x_j)}K(x_i,x_j)\right)_{n\times n} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2\prod_{j=1}^n w(x_j).$$

[13 级高代 I 期中 06] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 $m\times n$ 阶矩阵, 证明:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,¦\,\boldsymbol{B})+\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix},$$

其中 $(\boldsymbol{A}\,¦\,\boldsymbol{B})$ 和 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 左右并列和上下并列得到的分块矩阵.

[13 级高代 I 期中 07] n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个子式

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix},\ k=1,2,\cdots,n,$$

称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式. 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式都是正的, 并且非主对角线上的元素都是负的, 证明: 逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每个元素都是正的.

[13 级高代 II 期中 04] 设数域 $\mathbb{K}$ 上的三阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 具有相同的特征多项式, 证明: 其中必有两个矩阵在 $\mathbb{K}$ 上相似.

[13 级高代 II 期中 05] 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆复方阵, 证明: 存在可逆阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}$.

[13 级高代 II 期中 06] 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 并且存在 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=a\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}$, 其中 $a\in\mathbb{K}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.

[13 级高代 II 期中 07] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 V 上的线性变换, 其极小多项式 $m(\lambda)$ 和特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}$ 上的不可约因式分解为

$$m(\lambda)=P_1(\lambda)^{e_1}P_2(\lambda)^{e_2}\cdots P_t(\lambda)^{e_t},\quad f(\lambda)=P_1(\lambda)^{r_1}P_2(\lambda)^{r_2}\cdots P_t(\lambda)^{r_t},$$

其中 $P_1(\lambda),\cdots,P_t(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式. 证明: 对任意的 $1\le j\le t$,

(1) 线性变换 $P_j(\boldsymbol{\varphi})^{e_j}$ 和 $P_j(\boldsymbol{\varphi})^{r_j}$ 有相同的核空间;

(2) 记 W_j 为线性变换 $P_j(\boldsymbol{\varphi})^{e_j}$ 的核空间, 则 $\boldsymbol{\varphi}|_{W_j}$ 的极小多项式为 $P_j(\boldsymbol{\varphi})^{e_j}$.

♣ ♣ ♣

§ 3.6 解答或提示

[13 级高代 I 期中 03] 考虑下列矩阵乘法:

$$\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^n a_ic_i & \sum\limits_{i=1}^n a_id_i\\ \sum\limits_{i=1}^n b_ic_i & \sum\limits_{i=1}^n b_id_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\\ \vdots & \vdots\\ c_n & d_n\end{pmatrix},$$

等式两边同取行列式, 右边用 Cauchy-Binet 公式计算即得结论.

[13 级高代 I 期中 04] 设 $V_0=L(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_p)$, 则 V_0 是 $\mathbb{K}^n$ 的真子空间. 由高代白皮书例 3.103 可知, 存在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 使得 V_0 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间. 令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\gamma}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的所有解都可以表示为 $\boldsymbol{\gamma}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_p\boldsymbol{\eta}_p$, 其中 $k_1,\cdots,k_p\in\mathbb{K}$.

[13 级高代 I 期中 05] (1) 参考高代白皮书例 1.27.

(2) 考虑下列矩阵乘法:

$$\left(\frac{f(x_i)}{f(x_j)}K(x_i,x_j)\right)_{n\times n}=\begin{pmatrix} f(x_1)\sqrt{w(x_1)}P_0(x_1) & \cdots & f(x_1)\sqrt{w(x_1)}P_{n-1}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f(x_n)\sqrt{w(x_n)}P_0(x_n) & \cdots & f(x_n)\sqrt{w(x_n)}P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}$$
$$\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{f(x_1)}\sqrt{w(x_1)}P_0(x_1) & \cdots & \frac{1}{f(x_n)}\sqrt{w(x_n)}P_0(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{f(x_1)}\sqrt{w(x_1)}P_{n-1}(x_1) & \cdots & \frac{1}{f(x_n)}\sqrt{w(x_n)}P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix},$$

等式两边同取行列式, 并提取等式右边两个行列式每行每列的公因子, 再利用 (1) 即得要证的结论.

[13 级高代 I 期中 06] 考虑下列分块矩阵的初等变换:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$

由于分块初等变换不改变矩阵的秩, 故计算头尾两个矩阵的秩, 并由高代白皮书例 3.61 和例 3.62 可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\geq\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})+\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

[13 级高代 I 期中 07] 参考高代白皮书例 8.14, 证明过程完全类似.

[13 级高代 II 期中 04] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 相同的特征多项式为 $f(\lambda)$, 我们只要证明: 特征多项式为 $f(\lambda)$ 的数域 $\mathbb{K}$ 上的三阶矩阵, 其不变因子组 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),d_3(\lambda)$ 只有三种可能性, 那么 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 中至少有两个矩阵有相同的不变因子组, 从而它们在 $\mathbb{K}$ 上相似.

(1) 若 $\deg d_3(\lambda)=3$, 则 $d_3(\lambda)=f(\lambda)$, 从而 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$, 此时不变因子组为 $1,1,f(\lambda)$.

(2) 若 $\deg d_3(\lambda)=2$, 则 $\deg d_2(\lambda)=1$, $d_1(\lambda)=1$. 设 $d_2(\lambda)=\lambda-a$, 其中 $a\in\mathbb{K}$, 则由 $d_2(\lambda)\mid d_3(\lambda)$ 可设 $d_3(\lambda)=(\lambda-a)(\lambda-b)$, 其中 $b\in\mathbb{K}$, 于是 $f(\lambda)=(\lambda-a)^2(\lambda-b)$, 其中 a 是 $f(\lambda)$ 唯一的重数大于等于 2 的根, 此时不变因子组为 $1,\lambda-a,(\lambda-a)(\lambda-b)$.

(3) 若 $\deg d_3(\lambda)=1$, 则可设 $d_3(\lambda)=\lambda-a$, 其中 $a\in\mathbb{K}$. 由于 $d_i(\lambda)\mid d_3(\lambda)$, $d_1(\lambda)d_2(\lambda)d_3(\lambda)=f(\lambda)$ 且 $\deg f(\lambda)=3$, 故 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=\lambda-a$, 此时不变因子组为 $\lambda-a,\lambda-a,\lambda-a$.

[13 级高代 II 期中 05] 参考高代白皮书例 7.72.

[13 级高代 II 期中 06] 将条件整理为 $(a\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(a\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})=a\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}$, 由高代白皮书例 6.32 及其注可知, $a\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 $-a$, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $(\lambda+a)^n$.

[13 级高代 II 期中 07] 参考高代白皮书例 7.87.

§ 3.7　14 级高等代数期中考试大题

[14 级高代 I 期中 05] 对矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式组合定义展开式中的每一项

$$(-1)^{N(k_1,k_2,\ldots,k_n)}a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n},$$

其中 $(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S_n$, 若其取值为正, 称其为正项; 若其取值为负, 称其为负项. 求下面行列式的展开式中有多少项为正项?

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$

[14 级高代 I 期中 06] 设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 且 V_1,V_2 分别是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 在 $\mathbb{K}^n$ 中的解空间, 求证: $\mathbb{K}^n=V_1\oplus V_2$.

[14 级高代 I 期中 07] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和以及每列元素之和都为 0, 求证: $\boldsymbol{A}$ 的各元素的代数余子式 A_{ij} 都相等.

[14 级高代 II 期中 03] 已知 6 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子 $D_1(\lambda),\cdots,D_6(\lambda)$ 满足 $\lambda^3\mid D_5(\lambda)$, 但 λ^5 不能整除 $D_6(\lambda)$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

[14 级高代 II 期中 04] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 可逆, 求证: 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PCQ}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PDQ}$ 的充分必要条件是 $\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 与 $\lambda\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}$ 具有相同的不变因子.

[14 级高代 II 期中 05] 设 6 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & -b & 0 & 0 & 0 & 0\\ b & a & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & -b & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & -b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a\end{pmatrix},$$

其中 a, b 都是实数且 $b \neq 0$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

[14 级高代 II 期中 06] 设 $a_i\,(1 \leq i \leq n)$ 都是实数且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$, 证明下列矩阵可对角化:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

[14 级高代 II 期中 07] 设 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都是正实数, 证明: 对任一实对称阵 $\boldsymbol{C}$, 存在唯一的实对称阵 $\boldsymbol{B}$, 满足 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$.

♣♣♣

§ 3.7 解答或提示

[14 级高代 I 期中 05] 将 $|\boldsymbol{A}|$ 的第一列分别加到后 $n-1$ 列上, 可得一个下三角行列式, 其主对角元依次为 $1, 2, \cdots, 2$, 于是 $|\boldsymbol{A}| = 2^{n-1}$. 设 $|\boldsymbol{A}|$ 的正项有 x 个, 负项有 y 个, 则 $x + y = n!$. 又 $|\boldsymbol{A}|$ 的元素均为 1 或 -1, 故正项的值等于 1, 负项的值等于 -1, 从而 $x - y = |\boldsymbol{A}| = 2^{n-1}$, 于是 $x = \dfrac{1}{2}(n! + 2^{n-1})$, $y = \dfrac{1}{2}(n! - 2^{n-1})$.

[14 级高代 I 期中 06] 参考高代白皮书例 4.54.

[14 级高代 I 期中 07] 参考高代白皮书第 2 章解答题 14.

[14 级高代 II 期中 03] 注意到 $D_6(\lambda)$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 故 $\deg D_6(\lambda) = 6$. 由于 $D_5(\lambda) \mid D_6(\lambda)$ 并且 $d_6(\lambda) = \dfrac{D_6(\lambda)}{D_5(\lambda)}$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式, 故 $d_6(\lambda)$ 与 $D_6(\lambda)$ 有相同的根 (不计重数). 由假设 $\lambda^3 \mid D_5(\lambda)$, 故 $\lambda^3 \mid D_6(\lambda)$, 从而 $\lambda \mid d_6(\lambda)$, 于是 $\lambda^4 \mid D_6(\lambda)$, 又 $\lambda^5 \nmid D_6(\lambda)$, 故可设 $D_6(\lambda) = \lambda^4(\lambda - a)(\lambda - b)$, 其中 $ab \neq 0$.

(1) 若 $a \neq b$, 则 a, b 也都是 $d_6(\lambda)$ 的根, 从而 $D_5(\lambda) = \lambda^3$, $d_6(\lambda) = \lambda(\lambda - a)(\lambda - b)$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda - a, \lambda - b$, Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0, 0, 0, 0, a, b\}$.

(2.1) 若 $a = b$ 且 a 是 $d_6(\lambda)$ 的单根, 则 $D_5(\lambda) = \lambda^3(\lambda - a)$, $d_6(\lambda) = \lambda(\lambda - a)$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda - a, \lambda - a$, Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0, 0, 0, 0, a, a\}$.

(2.2) 若 $a = b$ 且 a 是 $d_6(\lambda)$ 的重根, 则 $D_5(\lambda) = \lambda^3$, $d_6(\lambda) = \lambda(\lambda - a)^2$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, (\lambda - a)^2$, Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{0, 0, 0, 0, \boldsymbol{J}_2(a)\}$.

[14 级高代 II 期中 04] 参考高代白皮书例 7.2.

[14 级高代 II 期中 05] 设 $z_0 = a + b\mathrm{i}$, $\overline{z}_0 = a - b\mathrm{i}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I}_6 - \boldsymbol{A}| = ((\lambda - a)^2 + b^2)^3 = (\lambda - z_0)^3(\lambda - \overline{z}_0)^3$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 z_0 (3 重), $\overline{z}_0$ (3 重). 下面计算特征值 z_0 的几何重数. 注意到 $z_0\boldsymbol{I}_6 - \boldsymbol{A}$ 的前 5 行和后 5 列构成的 5 阶子式是一个下三角行列式, 主对角元分别为 $b, -1, b, -1, b$, 故其值等于 $b^3 \neq 0$, 于是 $\mathrm{r}(z_0\boldsymbol{I}_6 - \boldsymbol{A}) = 5$, 从而特征值 z_0 的几何重数等于 $6 - \mathrm{r}(z_0\boldsymbol{I}_6 - \boldsymbol{A}) = 1$, 因此在 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中, 特征值 z_0 的 Jordan 块只有一个, 即为 $\boldsymbol{J}_3(z_0)$. 同理可证特征值 $\overline{z}_0$ 的 Jordan 块只有一个, 即为 $\boldsymbol{J}_3(\overline{z}_0)$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_3(z_0), \boldsymbol{J}_3(\overline{z}_0)\}$. 事实上, 本题中的 $\boldsymbol{A}$ 是实数域上的广义 Jordan 块. 实数域上的广义 Jordan 块的一般定义可参考高代白皮书例 7.96.

[14 级高代 II 期中 06] 参考高代白皮书例 6.22 以及第 328 页的注.

[14 级高代 II 期中 07] 参考高代白皮书例 6.92.

§ 3.8　15 级高等代数期中考试大题

[15 级高代 I 期中 06] 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1^2-1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2-1 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2-1 \end{pmatrix},$$

证明: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geq n-1$, 并确定等号成立的充分必要条件.

[15 级高代 I 期中 07] 设 $M_2(\mathbb{R})$ 是二阶实矩阵全体构成的实线性空间, V 是 $M_2(\mathbb{R})$ 的子空间, 满足 V 中所有的非零矩阵都是可逆矩阵. 证明: $\dim V\leq 2$, 并举例说明可以找到 $M_2(\mathbb{R})$ 的满足上述性质的二维子空间.

[15 级高代 II 期中 02] 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 满足 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)=n$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 在复数域上可对角化.

[15 级高代 II 期中 04] 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a+1 & 0 & 0 \\ 3 & b & 2 & 0 \\ 5 & 4 & a & 2 \end{pmatrix},$$

试求 $\boldsymbol{A}$ 的一切可能的 Jordan 标准型, 并给出 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件.

[15 级高代 II 期中 05] 设 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}$ 为 n 维复线性空间 V 上的线性变换, 满足 $\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{0}$. 问: 是否存在线性空间 V 的一组基, 使得 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}$ 在这组基下的表示矩阵均为上三角矩阵? 若存在, 请证明; 若不存在, 请举出例子.

[15 级高代 II 期中 06] 设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 其极小多项式为 $m(\lambda)$. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 V 中非零向量, 由 $\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\varphi}^2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots\}$ 张成的子空间 $C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha})$ 称为 $\boldsymbol{\varphi}$ 关于循环向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的循环子空间.

(1) 证明: $m(\lambda)$ 为 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式的充分必要条件是 V 的任一非零 $\boldsymbol{\varphi}$–不变子空间 U 必为如下形式:

$$U=C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}_1)\oplus C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}_2)\oplus\cdots\oplus C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}_k),$$

并且 $\boldsymbol{\varphi}|_{C(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}_i)}\,(1\leq i\leq k)$ 的极小多项式都是 $m(\lambda)$.
(2) 试构造四维实列向量空间上的线性变换 $\boldsymbol{\varphi}$, 使得其极小多项式是二次不可约实系数多项式, 并验证 $\boldsymbol{\varphi}$ 有无限个不变子空间.
[15 级高代 II 期中 07] 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 递归地定义矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A},\ \ p_k=-\frac{1}{k}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_k),\ \ \boldsymbol{A}_{k+1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}_k+p_k\boldsymbol{I}_n),\ k=1,2,\cdots.$$

求证: $\boldsymbol{A}_{n+1}=\boldsymbol{O}$.

♣ ♣ ♣

§ 3.8 解答或提示

[15 级高代 I 期中 06] 利用矩阵秩的降阶公式 (高代白皮书例 3.73) 来证明, 等号成立的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$.
[15 级高代 I 期中 07] 参考 [问题 2015A07].
[15 级高代 II 期中 02] 参考高代白皮书第 6 章解答题 11.
[15 级高代 II 期中 04] 参考高代白皮书例 7.57.
[15 级高代 II 期中 05] 由 $\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{0}$ 可得 $(\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{I}_V)(\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{I}_V)=\boldsymbol{I}_V$, 故 $(\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{I}_V)(\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{I}_V)=\boldsymbol{I}_V$, 即有 $\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$, 于是 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}$. 再由高代白皮书例 6.40 可知, $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}$ 可同时上三角化.
[15 级高代 II 期中 06] 参考高代白皮书例 7.18 和例 7.21.
[15 级高代 II 期中 07] 参考高代白皮书例 6.97.

§ 3.9　16 级高等代数期中考试大题

[16 级高代 I 期中 04] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶非零实矩阵, 其中 $n\geq 3$ 为奇数. 设 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若对任意的 $1\leq i,j\leq n$, $a_{ij}+A_{ij}=0$ 成立, 试求 $|\boldsymbol{A}|$ 的值.

[16 级高代 I 期中 05] 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个两两不同的实数, 求证: 在实数域上连续函数全体构成的线性空间 V 中, 向量组 $\{\mathrm{e}^{a_1x^2},\mathrm{e}^{a_2x^2},\cdots,\mathrm{e}^{a_nx^2}\}$ 线性无关.

[16 级高代 I 期中 06] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为奇异阵且满足 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^*)=0$, 求证: $(\boldsymbol{A}^*)^2=\boldsymbol{O}$.

[16 级高代 I 期中 07] 设 $M_n(\mathbb{K})$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上 n 阶方阵全体构成的线性空间, W 是由 $M_n(\mathbb{K})$ 的子集 $\{\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\mid \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{K})\}$ 张成的子空间, 试求 W 的维数和一组基.

[16 级高代 II 期中 04] 求证: 存在 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 n 为偶数.

[16 级高代 II 期中 05] 设 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\mu\boldsymbol{B}$, 其中 μ 为非零复数. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 的全体不同特征值只有 k 个, 则

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\big(n-\mathrm{r}(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})\big)\leq n-\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^k).$$

[16 级高代 II 期中 06] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换, 满足 φ 的极小多项式等于其特征多项式. 设 U 是 V 的任一非零 φ–不变子空间, 证明: 限制变换 $\varphi|_U$ 的极小多项式也等于其特征多项式.

[16 级高代 II 期中 07] 设 V 是 n 阶复矩阵构成的线性空间, V 上的线性变换 φ 定义为 $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AXA}'$, 证明: φ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

♣ ♣ ♣

§ 3.9 解答或提示

[16 级高代 I 期中 04] 由于 $\boldsymbol{A}$ 非零, 故存在某个 $a_{kl}\neq 0$. 注意到 $A_{ij}=-a_{ij}$, 将 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 k 行展开可得

$$|\boldsymbol{A}|=a_{k1}A_{k1}+\cdots+a_{kl}A_{kl}+\cdots+a_{kn}A_{kn}=-(a_{k1}^2+\cdots+a_{kl}^2+\cdots+a_{kn}^2)<0.$$

条件 $A_{ij}=-a_{ij}\,(1\leq i,j\leq n)$ 等价于 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}'$, 于是由高代白皮书例 2.38 可得 $|\boldsymbol{A}|^{n-1}=|\boldsymbol{A}^*|=|-\boldsymbol{A}'|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$, 即有 $|\boldsymbol{A}|^{n-2}=-1$. 由于 $|\boldsymbol{A}|<0$, 故可得 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

[16 级高代 I 期中 05] 设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为实数, 使得 $f(x)=c_1\mathrm{e}^{a_1x^2}+c_2\mathrm{e}^{a_2x^2}+\cdots+c_n\mathrm{e}^{a_nx^2}=0$. 令 $x=0$ 可得 $c_1+c_2+\cdots+c_n=0$. 对 $f(x)$ 求导两次, 再令 $x=0$ 可得 $c_1(2a_1)+c_2(2a_2)+\cdots+c_n(2a_n)=0$. 对 $f(x)$ 求导四次, 再令 $x=0$ 可得 $c_1(2a_1)^2+c_2(2a_2)^2+\cdots+c_n(2a_n)^2=0$. 不断这样做下去, $\cdots$, 对 $f(x)$ 求导 $2n-2$ 次, 再令 $x=0$ 可得 $c_1(2a_1)^{n-1}+c_2(2a_2)^{n-1}+\cdots+c_n(2a_n)^{n-1}=0$. 把上面关于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的方程联立起来, 得到线性方程组的系数行列式是关于 $2a_1,2a_2,\cdots,2a_n$ 的 Vandermonde 行列式, 由于 a_i 互异, 故系数行列式非零, 从而线性方程组只有零解, 即 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$, 于是 $\{\mathrm{e}^{a_1x^2},\mathrm{e}^{a_2x^2},\cdots,\mathrm{e}^{a_nx^2}\}$ 线性无关.

[16 级高代 I 期中 06] 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leq n-2$, 则 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$, 结论显然成立. 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$, 于是存在非零列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{K}^n$, 使得 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$. 注意到 $0=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^*)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}$, 故 $(\boldsymbol{A}^*)^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}'=(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{O}$.

[16 级高代 I 期中 07] 设 $V=\{\boldsymbol{M}\in M_n(\mathbb{K})\mid \mathrm{tr}(\boldsymbol{M})=0\}$, 由矩阵迹的线性容易验证 V 是 $M_n(\mathbb{K})$ 的子空间, 并且 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\,(i\neq j),\,\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{ii}\,(2\leq i\leq n)\}$ 是 V 的一组基, 于是 $\dim V=n^2-1$. 再由矩阵迹的交换性容易验证 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\in V$, 于是 W 是 V 的子空间. 对 V 的基向量 $\boldsymbol{E}_{ij}\,(i\neq j)$, 有 $\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ii}\in W$; 对 V 的基向量 $\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{ii}\,(2\leq i\leq n)$, 有 $\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{ii}=\boldsymbol{E}_{1i}\boldsymbol{E}_{i1}-\boldsymbol{E}_{i1}\boldsymbol{E}_{1i}\in W$. 因此 $W=V$, $\dim W=n^2-1$, W 的一组基为 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\,(i\neq j),\,\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{ii}\,(2\leq i\leq n)\}$.

[16 级高代 II 期中 04] 参考高代白皮书例 7.21.

[16 级高代 II 期中 05] 任取 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_0 及其特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 即有 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$, 在等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}+\mu\boldsymbol{B}$ 两边作用 $\boldsymbol{\alpha}$ 有 $\boldsymbol{AB\alpha}=\boldsymbol{BA\alpha}+\mu\boldsymbol{B\alpha}=(\lambda_0+\mu)\boldsymbol{B\alpha}$. 若 $\boldsymbol{B\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{B\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 $\lambda_0+\mu$ 的特征向量. 在等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}+\mu\boldsymbol{B}$ 两边作用 $\boldsymbol{B\alpha}$ 有 $\boldsymbol{AB}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{BAB\alpha}+\mu\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\alpha}=(\lambda_0+2\mu)\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\alpha}$. 若 $\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 $\lambda_0+2\mu$ 的特征向量. 不断这样讨论下去, $\cdots$, 若 $\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 $\lambda_0+(k-1)\mu$ 的特征向量. 在等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}+\mu\boldsymbol{B}$ 两边作用 $\boldsymbol{B}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 有 $\boldsymbol{AB}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{BAB}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{\alpha}=(\lambda_0+k\mu)\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{\alpha}$. 因为 $\lambda_0+i\mu\,(0\leq i\leq k-1)$ 已是 $\boldsymbol{A}$ 的 k 个不同特征值, 故 $\lambda_0+k\mu$ 不可能是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 于是 $\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 上述讨论告诉我们, $\boldsymbol{A}$ 的任一特征向量都属于 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{B}^k$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征子空间的直和包含于 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{B}^k$ 中, 两边同取维数即得要证的不等式. 事实上, 我们可以进一步证明 $\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{O}$, 具体细节

请参考教学论文 [21] 的命题 2.

[16 级高代 II 期中 06] 当 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 时, 参考高代白皮书第 7 章解答题 8. 当 $\mathbb{K}$ 是一般的数域时, 参考教学论文 [20] 的定理 2 和命题 1 (v).

[16 级高代 II 期中 07] 参考高代白皮书第 7 章解答题 6.

§ 3.10 17 级高等代数期中考试大题

[17 级高代 I 期中 04] 证明: 对任一 n 阶方阵 $\boldsymbol{M}$, 存在反对称阵 $\boldsymbol{A}$, 迹为零的对称阵 $\boldsymbol{B}$ 和常数 c, 使得 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{I}_n$, 并且 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^2)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2)+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^2)+\dfrac{1}{n}\big(\mathrm{tr}(\boldsymbol{M})\big)^2$.

[17 级高代 I 期中 05] 设 a,b,c 为实数, 求下列循环矩阵的秩:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

[17 级高代 I 期中 06] 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 满足 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 证明: 存在矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$, 使得 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}$.

[17 级高代 I 期中 07] 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=-a_{ji}\,(i\neq j)$ 且 $a_{ii}\geq 0\,(1\leq i\leq n)$, 证明: $|\boldsymbol{A}|\geq 0$.

[17 级高代 II 期中 04] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行每列只有一个元素非零, 并且那些非零元素为 1 或 -1, 证明: $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是单位根.

[17 级高代 II 期中 05] 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 求证: $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式的次数小于等于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+1$.

[17 级高代 II 期中 06] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶复方阵, 且存在复数 a,b 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$, 证明: 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 都是上三角矩阵.

[17 级高代 II 期中 07] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\,(n\geq 2)$ 阶复方阵, 满足 $|\boldsymbol{A}|=1$. 设 $\boldsymbol{A}$ 与其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 都适合多项式 $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_1^{-1})^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_k^{-1})^{m_k}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_k,\lambda_k^{-1}$ 是两两互异的非零复数, $m_1,\cdots,m_k$ 是正整数. 证明: $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

♣ ♣ ♣

§ 3.10 解答或提示

[17 级高代 I 期中 04] 等式 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{I}_n$ 两边取迹可得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{M})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})+c\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_n)=nc$, 故 $c=\dfrac{1}{n}\mathrm{tr}(\boldsymbol{M})$. 等式 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{I}_n$ 两边取转置可得 $\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'+c\boldsymbol{I}_n=-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{I}_n$, 故 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}')$, $\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}')-c\boldsymbol{I}_n$. 容易验

证上述 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},c$ 满足题目要求. 由矩阵迹的性质经计算可得, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2)=\dfrac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^2+\boldsymbol{M}'^2-\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}'-\boldsymbol{M}'\boldsymbol{M})=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^2-\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}')$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^2)=\dfrac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^2+\boldsymbol{M}'^2+\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}'+\boldsymbol{M}'\boldsymbol{M})-c\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}')+c^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_n)=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^2+\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}')-2c\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{M})+nc^2=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^2+\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}')-nc^2$, $\dfrac{1}{n}\big(\mathrm{tr}(\boldsymbol{M})\big)^2=\dfrac{1}{n}(nc)^2=nc^2$. 因此, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2)+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^2)+\dfrac{1}{n}\big(\mathrm{tr}(\boldsymbol{M})\big)^2=\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^2)$.

[17 级高代 I 期中 05] 经计算可知, $|\boldsymbol{A}|=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\big((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\big)$.

(1) 若 $a+b+c\neq 0$ 且 a,b,c 不全相等, 则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 此时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$.

(2) 若 $a+b+c\neq 0$ 且 a,b,c 全部相等, 即 $a=b=c\neq 0$, 此时容易看出 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$.

(3) 若 $a+b+c=0$ 且 a,b,c 全部相等, 即 $a=b=c=0$, 也即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 此时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=0$.

(4) 若 $a+b+c=0$ 且 a,b,c 不全相等, 则将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前两行加到第三行上, 可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\to\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

我们断言 $\boldsymbol{B}$ 的前两行线性无关. 用反证法, 若 $\boldsymbol{B}$ 的前两行线性相关, 则存在实数 k, 使得 $(a,b,c)=k(c,a,b)$. 由于 a,b,c 不全相等, 故不妨设 $a\neq 0$, 则有 $a=kc$, $c=kb$, $b=ka$, 从而 $a=ak^3$, 于是 $k^3=1$. 又 k 为实数, 故 $k=1$, 从而 $a=b=c$, 矛盾! 因此, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$. 若采用高代 II 的方法, 可参考极小多项式的基本性质 (高代白皮书例 5.18) 以及 https://www.cnblogs.com/torsor/p/8848641.html, § 2 循环矩阵的性质 (P4).

[17 级高代 I 期中 06] 由条件 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 以及 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{C}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. 再由高代白皮书例 3.105 及其转置版本可知, 存在矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$, 使得 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}$. 考虑如下分块初等变换: 第一分块行左乘 $-\boldsymbol{M}$ 加到第二分块行上, 再将第一分块列右乘 $-\boldsymbol{N}$ 加到第二分块列上, 可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}-\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}-\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

由于矩阵的秩在分块初等变换下不改变, 故 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{M}\boldsymbol{B})$, 比较条件可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{M}\boldsymbol{B})=0$, 于是 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\boldsymbol{N}$.

[17 级高代 I 期中 07] 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, 其中 $b_{ii}=0\,(1\leq i\leq n)$, $b_{ij}=a_{ij}\,(i\neq j)$, 则由条件可知 $\boldsymbol{B}$ 为反对称阵. 设 $D=\mathrm{diag}\{a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\}$, 则由条件可知 $\boldsymbol{D}$ 是主对角元全大于等于零的对角阵, 并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$. 对任意的正实数 t, $\boldsymbol{D}+t\boldsymbol{I}_n$ 是主对角元全大于零的对角阵, 则由高代白皮书例 3.82 可知, $|\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}_n|=|\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{D}+t\boldsymbol{I}_n)|>0$. 上式左边是关于 t 的多项式, 从而关于 t 连续, 令 $t\to 0+$, 即得 $|\boldsymbol{A}|\geq 0$. 若采用高代 II 的方法, 可直接引用高代白皮书例 8.66.

[17 级高代 II 期中 04] 参考高代白皮书例 6.15.

[17 级高代 II 期中 05] 参考高代白皮书例 7.22.

[17 级高代 II 期中 06] 参考高代白皮书第 6 章解答题 8.

[17 级高代 II 期中 07] 参考高代白皮书第 7 章解答题 5.

§ 3.11 18 级高等代数期中考试大题

[**18 级高代 I 期中 02**] 计算下列 n 阶行列式的值:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\dfrac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \dfrac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n}\\ \dfrac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \dfrac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \dfrac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \cdots & \dfrac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n}\end{vmatrix}.$$

[**18 级高代 I 期中 05**] 设函数 $f(x)=\sum\limits_{i=-k}^{m}a_ix^i$, 其中 k,m 都是正整数. 设 n 阶非异阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和都等于 c, 证明: $f(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=-k}^{m}a_i\boldsymbol{A}^i$ 的每行元素之和都等于 $f(c)$.

[**18 级高代 I 期中 06**] 设多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$, $\omega_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}\,(0\leq k\leq n-1)$ 为全体 n 次单位根, 循环矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_0 & a_1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0\end{pmatrix}.$$

证明: 恰有 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 个 n 次单位根是 $f(x)$ 的根 (不计重根数).

[**18 级高代 I 期中 07**] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n\,(n\geq 3)$ 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 证明:

$$|\boldsymbol{AB}^*+\boldsymbol{BA}^*|=0.$$

[**18 级高代 II 期中 04**] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都是整数, p,q 是互素的整数且 $q>1$, 证明: 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\dfrac{p}{q}\boldsymbol{x}$ 只有零解.

[**18 级高代 II 期中 05**] 设 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 为两两乘法可交换的 2019 阶实方阵, $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 n 元实系数多项式. 令 $\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n)$, 证明: 存在 $\boldsymbol{B}$ 的某个特征值 λ_0, 使得方程 $f(x_1,\cdots,x_n)-\lambda_0=0$ 有一组实数解.

[18 级高代 II 期中 06] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 不可对角化当且仅当存在一元多项式 $f(x)$, 使得 $f(\boldsymbol{A})$ 非零, $\boldsymbol{I}_n+f(\boldsymbol{A})$ 可逆, 并且 $(\boldsymbol{I}_n+f(\boldsymbol{A}))^{-1}$ 与 $\boldsymbol{I}_n-f(\boldsymbol{A})$ 相似.

[18 级高代 II 期中 07] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵, 证明: 存在复数 $c_1,\cdots,c_{n-1}$, 使得

$$\boldsymbol{A}-c_1\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}-c_2\mathrm{e}^{2\boldsymbol{A}}-\cdots-c_{n-1}\mathrm{e}^{(n-1)\boldsymbol{A}}$$

是可对角化矩阵.

♣ ♣ ♣

§ 3.11 解答或提示

[18 级高代 I 期中 02] 第 (i,j) 元素 $\dfrac{1-a_i^nb_j^n}{1-a_ib_j}=1+a_ib_j+\cdots+a_i^{n-1}b_j^{n-1}$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 可以写成两个 Vandermonde 矩阵 $\boldsymbol{V}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $\boldsymbol{V}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的乘积, 从而 $|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)$.

[18 级高代 I 期中 05] 参考高代白皮书例 2.15.

[18 级高代 I 期中 06] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/8848641.html, § 2 循环矩阵的性质 (P4).

[18 级高代 I 期中 07] 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆或 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 此时 $\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$, 要证的等式显然成立. 下设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都不可逆, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)\le 1$ 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^*)\le 1$, 故由矩阵秩的基本不等式可得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}^*+\boldsymbol{BA}^*)\le\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}^*)+\mathrm{r}(\boldsymbol{BA}^*)\le\mathrm{r}(\boldsymbol{B}^*)+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)\le 2<n,$$

从而 $\boldsymbol{AB}^*+\boldsymbol{BA}^*$ 不满秩, 于是 $|\boldsymbol{AB}^*+\boldsymbol{BA}^*|=0$.

[18 级高代 II 期中 04] 参考高代白皮书例 6.5.

[18 级高代 II 期中 05] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/12269011.html.

[18 级高代 II 期中 06] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/12267655.html.

[18 级高代 II 期中 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/12258547.html.

§ 3.12 19 级高等代数期中考试大题

[19 级高代 I 期中 05] 设 n 阶非零复方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^* = \overline{\boldsymbol{A}}'$, 求证: $\boldsymbol{A}$ 是非异阵.

[19 级高代 I 期中 06] 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶幂零阵, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. 求证: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$.

[19 级高代 I 期中 07] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实反对称阵, $\boldsymbol{C}$ 为 n 阶实反对称阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 阶实矩阵. 证明: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_m$ 和 $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_m)^{-1}\boldsymbol{B}$ 都是非异阵.

[19 级高代 II 期中 04] 设 $n\,(n > 2)$ 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 2, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.

[19 级高代 II 期中 05] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都是整数, 其中阶数 n 为偶数, 并且对任意的 $1 \leq r \leq n$, $\boldsymbol{A}$ 的所有 r 主子式之和都是奇数. 证明: 不存在整数 k, 使得线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = k\boldsymbol{x}$ 有非零解.

[19 级高代 II 期中 06] 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶实方阵, 若对任意的 $1 \leq i \leq n$, 都有 $|a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优阵. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为主对角元都大于零的 n 阶严格对角占优阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^2$, 证明: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

[19 级高代 II 期中 07] 设 a, b 都是实数, 其中 $b \neq 0$, 证明: 对任意的正整数 m, 存在 4 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 使得

$$\boldsymbol{A}^m = \begin{pmatrix} a & b & 2 & 0 \\ -b & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

♣ ♣ ♣

§ 3.12 解答或提示

[19 级高代 I 期中 05] 参考高代白皮书例 2.17, 本题是例 2.17 的复数版本.

[19 级高代 I 期中 06] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/12272225.html.

[19 级高代 I 期中 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/12272213.html.

[19 级高代 II 期中 04] 本题是高代白皮书例 7.47 的延拓. 设 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型 $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_1}(0), \cdots, \boldsymbol{J}_{r_k}(0), \boldsymbol{J}_{s_1}(\lambda_1), \cdots, \boldsymbol{J}_{s_l}(\lambda_l)\}$, 其中 $\lambda_j \neq 0\,(1 \leq j \leq l)$. 注意到

$\mathrm{r}(\boldsymbol{J})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, 故有

$$2=(r_1-1)+\cdots+(r_k-1)+s_1+\cdots+s_l=(r_1+\cdots+r_k+s_1+\cdots+s_l)-k=n-k,$$

于是 $k=n-2$ 并且只有以下五种可能:

(1) $r_1=\cdots=r_k=1$, $l=1$, $s_1=2$: $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\boldsymbol{J}_2(\lambda_1)\}$, 其中 $\lambda_1\neq 0$;

(2) $r_1=\cdots=r_k=1$, $l=2$, $s_1=s_2=1$: $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\lambda_1,\lambda_2\}$, 其中 $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$;

(3) $r_1=\cdots=r_{k-1}=1$, $r_k=2$, $l=1$, $s_1=1$: $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\boldsymbol{J}_2(0),\lambda_1\}$, 其中 $\lambda_1\neq 0$;

(4) $r_1=\cdots=r_{k-1}=1$, $r_k=3$, $l=0$: $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\boldsymbol{J}_3(0)\}$;

(5) $r_1=\cdots=r_{k-2}=1$, $r_{k-1}=r_k=2$, $l=0$: $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{0,\cdots,0,\boldsymbol{J}_2(0),\boldsymbol{J}_2(0)\}$.

[19 级高代 II 期中 05] 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$, 则由高代白皮书的例 1.47 可知, a_r 等于 $(-1)^r$ 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶主子式之和, 再由假设可知 $a_r\,(1\leq r\leq n)$ 都是奇数, 以及 n 是偶数. 用反证法证明结论, 若存在整数 k, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}$ 有非零解, 则 k 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 即为 $f(\lambda)$ 的根. 若 k 为奇数, 则 k^n, a_1k^{n-1}, $\cdots$, $a_{n-1}k$ 和 a_n 都是奇数, 于是 $f(k)=k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n$ 为奇数, 这与 $f(k)=0$ 矛盾. 若 k 为偶数, 则 k^n, a_1k^{n-1}, $\cdots$, $a_{n-1}k$ 都是偶数, 但 a_n 为奇数, 于是 $f(k)=k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n$ 为奇数, 这与 $f(k)=0$ 矛盾.

[19 级高代 II 期中 06] 由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为主对角元全大于零的严格对角占优阵, 故由第一圆盘定理可知, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值的实部均严格大于零, 从而 $\boldsymbol{A},-\boldsymbol{B}$ 没有公共的特征值, 于是由高代白皮书例 6.88 可知, 矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(-\boldsymbol{B})$ 只有零解. 由 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^2$ 变形可得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2)=(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2)(-\boldsymbol{B})$, 利用上述结论可得 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$; 再次变形可得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(-\boldsymbol{B})$, 再次利用上述结论可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

[19 级高代 II 期中 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/13925590.html, 或高代白皮书例 7.77.

§ 3.13 20 级高等代数期中考试大题

[20 级高代 I 期中 04] 记数域 $\mathbb{K}$ 上所有 n 阶方阵全体构成的线性空间为 $M_n(\mathbb{K})$. 对 $\boldsymbol{A}\in M_n(\mathbb{K})$, 考虑 $C(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{K})\mid \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\}$.

(1) 若 $n=3$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 求 $C(\boldsymbol{A})$ 的一组基.

(2) 若 $n=2$, 试确定 $\dim C(\boldsymbol{A})$ 的所有可能值.

[20 级高代 I 期中 05] 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 证明: 至多只有两个复数 λ, 使得 $\lambda\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}^*$ 不可逆.

[20 级高代 I 期中 06] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 证明: $|\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})-\mathrm{r}(\boldsymbol{BA})|\le\dfrac{n}{2}$.

[20 级高代 I 期中 07] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实方阵, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是主对角元全大于零的上三角阵, 并且满足 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}'=2\boldsymbol{AA}'$. 证明:

(1) $\boldsymbol{B}$ 必为对称阵;

(2) $\boldsymbol{A}$ 为对角阵当且仅当 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{AA}'$;

(3) $|\boldsymbol{B}|>0$.

[20 级高代 II 期中 03] 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{C}$, 证明下列矩阵可对角化:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\-a_n&a_1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a_2\\-a_2&\cdots&-a_n&a_1\end{pmatrix}.$$

[20 级高代 II 期中 04] 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $\lambda^3-\lambda^2$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 可能的互不相似的 Jordan 标准型的总个数.

[20 级高代 II 期中 05] 设 V 为线性空间, $\boldsymbol{\varphi}_1,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_k$ 是 V 上的线性变换, 满足: $\boldsymbol{\varphi}_i^2=\boldsymbol{\varphi}_i\,(1\le i\le k)$, $\boldsymbol{\varphi}_i\boldsymbol{\varphi}_j=0\,(1\le i\ne j\le k)$, 证明:

$$V=\bigoplus_{i=1}^k\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\varphi}_i\bigoplus\left(\bigcap_{j=1}^k\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\varphi}_j\right).$$

[20 级高代 II 期中 06] 设 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值都是属于开区间 $(-1,1)$ 的实数, 证明: 矩阵方程 $\sin\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$ 必有解.

[20 级高代 II 期中 07] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n\,(n\geq 2)$ 阶方阵, 满足: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$. 证明: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为非异阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 0 的代数重数等于 1 且 $\boldsymbol{B}$ 的秩等于 1.

♣ ♣ ♣

§ 3.13 解答或提示

[20 级高代 I 期中 04] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/15375004.html. 高代 I 的解题思路是: (1) 利用矩阵乘法直接进行计算, (2) 利用线性方程组的求解理论进行讨论.

[20 级高代 I 期中 05] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/15375004.html. 高代 I 的证明: 由于 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)\leq 1$, 于是存在 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^n$, 使得 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$. 由行列式的降阶公式可得 $|\lambda\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}^*|=|\lambda\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'|=\lambda^{n-1}(\lambda+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha})$, 于是使得 $\lambda\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}^*$ 不可逆的 λ 至多有两个: 0 和 $-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}$.

[20 级高代 I 期中 06] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/15375004.html. 高代 I 的证明: 由对称性不妨设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\geq\mathrm{r}(\boldsymbol{BA})$, 故只要证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})-\mathrm{r}(\boldsymbol{BA})\leq\dfrac{n}{2}$. 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leq\dfrac{n}{2}$, 则结论显然成立. 下设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})>\dfrac{n}{2}$. 注意到 $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{BA})\geq\mathrm{r}\left((\boldsymbol{AB})^2\right)$. 由高代白皮书例 3.66 (Sylvester 不等式) 可得 $\mathrm{r}\left((\boldsymbol{AB})^2\right)\geq 2\,\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})-n$, 于是

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})-\mathrm{r}(\boldsymbol{BA})\leq\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})-\mathrm{r}\left((\boldsymbol{AB})^2\right)\leq n-\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})<\frac{n}{2}.$$

[20 级高代 I 期中 07] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/15375004.html. 高代 I 的证明思路是: 利用矩阵的运算进行证明, 但过程较繁琐.

[20 级高代 II 期中 03] 参考高代白皮书第 2 章解答题 13 ($b=-1$ 的情形), 以及高代白皮书例 6.55 或例 6.64 的推论 (对应于两种证法).

[20 级高代 II 期中 04] 由于 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $\lambda^3-\lambda^2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中可能出现的 Jordan 块只能是以下三种: $\boldsymbol{J}_1(0)$, $\boldsymbol{J}_2(0)$ 和 $\boldsymbol{J}_1(1)$. 设这三种 Jordan 出现的次数为 x,y,z, 则 $x+2y+z=n$ 且 $x\geq 0$, $y\geq 1$, $z\geq 1$. 这一方程整数解的个数即为 $\boldsymbol{A}$ 可能的互不相似的 Jordan 标准型的总个数. 下分两种情况讨论.

(1) 若 $n=2k\,(k\geq 2)$, 则 $1\leq y\leq k-1$, $1\leq z\leq n-2y$, $x=n-2y-z$, 即若 y 取定,

则 z 有 $n-2y$ 种选择, 而 x 被唯一确定. 因此, 方程整数解的个数为

$$\sum_{y=1}^{k-1}(n-2y)=n(k-1)-2\sum_{y=1}^{k-1}y=k(k-1)=\frac{1}{4}n(n-2).$$

(2) 若 $n=2k+1\,(k\geq 1)$, 则 $1\leq y\leq k$, $1\leq z\leq n-2y$, $x=n-2y-z$, 即若 y 取定, 则 z 有 $n-2y$ 种选择, 而 x 被唯一确定. 因此, 方程整数解的个数为

$$\sum_{y=1}^{k}(n-2y)=nk-2\sum_{y=1}^{k}y=k^2=\frac{1}{4}(n-1)^2.$$

[**20 级高代 II 期中 05**] 参考高代白皮书第 4 章解答题 10. 注意到幂等变换 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 可对角化, 并且 $\boldsymbol{\varphi}_i\boldsymbol{\varphi}_j=\boldsymbol{\varphi}_j\boldsymbol{\varphi}_i=\mathbf{0}\,(i\neq j)$, 故也可利用可同时对角化 (高代白皮书例 6.44) 来证明, 细节留给读者完成.

[**20 级高代 II 期中 06**] 证明过程完全类似于高代白皮书第 7 章解答题 12.

[**20 级高代 II 期中 07**] 证明过程是高代白皮书例 7.32 证法 1 的自然延续, 细节请读者自行完成.

§ 3.14　21 级高等代数期中考试大题

[21 级高代 I 期中 03] 复数 $\alpha = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ 的共轭定义为 $\overline{\alpha} = a - b\mathrm{i}$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$. 令

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

证明: $\mathbb{H}$ 在矩阵的加法和实数关于矩阵的数乘下成为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 并求 $\mathbb{H}$ 的一组基和维数.

[21 级高代 I 期中 04] 求解下列 $n\,(n \geq 2)$ 元齐次线性方程组, 其中 a 为参数:

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0. \end{cases}$$

[21 级高代 I 期中 05] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 阶方阵全体构成的线性空间, V_1 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 阶上三角阵全体构成的子空间, V_2 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 阶反对称阵全体构成的子空间, 求证: $V = V_1 \oplus V_2$.

[21 级高代 I 期中 06] 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 $m \times n$ 矩阵, 证明:

(1) 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$, 则存在 n 阶非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{AP}$ 的后 $n-r$ 列全为零.

(2) 若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BS}$ 且 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AT}$, 则存在非异阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AQ}$.

[21 级高代 I 期中 07] 两个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 的 Hadamard 乘积定义为 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = (a_{ij}b_{ij})_{m \times n}$. 证明:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

♣ ♣ ♣

§ 3.14 解答或提示

[21 级高代 I 期中 03] 直接验证 $\mathbb{H}$ 在矩阵加法和实数关于矩阵的数乘这两个运算下满足 8 条公理, 从而 $\mathbb{H}$ 是实线性空间 (注意 $\mathbb{H}$ 不是复线性空间). 设 $\alpha = a + b\mathrm{i}$, $\beta = c + d\mathrm{i}$,

其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 则

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\mathrm{i} & c+d\mathrm{i}\\ -c+d\mathrm{i} & a-b\mathrm{i}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\\ \mathrm{i}&0\end{pmatrix}.$$

容易验证 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\\ \mathrm{i}&0\end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 因此它们是 $\mathbb{H}$ 的一组基. 特别地, $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{H}=4$. 事实上, 读者不难验证上述四个 2 阶矩阵满足 Hamilton 四元数 $1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}$ 的运算规则, 从而是四元数的矩阵表示, 并且 $\mathbb{H}$ 作为 $\mathbb{R}$–代数同构于四元数代数 $\mathbb{R}+\mathbb{R}\mathrm{i}+\mathbb{R}\mathrm{j}+\mathbb{R}\mathrm{k}$.

[**21 级高代 I 期中 04**] 设齐次线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 利用行列式的降阶公式计算出 $|\boldsymbol{A}|=a^{n-1}(a+\dfrac{n(n+1)}{2})$, 于是由 Cramer 法则可知, 当 $a\neq 0$ 且 $a\neq -\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时, 齐次线性方程组只有零解. 当 $a=0$ 时, 齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,\cdots,0)'$, $\cdots$, $\boldsymbol{\eta}_{n-1}=(-1,0,\cdots,0,1)'$. 当 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时, 齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=(1,2,3,\cdots,n)'$.

[**21 级高代 I 期中 05**] 一方面, 由上三角阵和反对称阵的定义容易验证 $V_1\cap V_2=0$. 另一方面, 由高代白皮书例 3.29 可知 $\dim V_1=n(n+1)/2$, $\dim V_2=n(n-1)/2$, 于是 $\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2=n^2=\dim V$, 从而 $V=V_1\oplus V_2$. 也可以将一个 n 阶方阵写成一个上三角阵和一个反对称阵的和, 从而得到 $V=V_1+V_2=V_1\oplus V_2$.

[**21 级高代 I 期中 06**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/16582054.html.

[**21 级高代 I 期中 07**] 参考 https://www.cnblogs.com/torsor/p/16582054.html.

参 考 文 献

[1] 谢启鸿, 姚慕生, 吴泉水. 高等代数学 (第四版). 上海: 复旦大学出版社, 2022.

[2] 谢启鸿, 姚慕生. 高等代数 (第四版), 大学数学学习方法指导丛书. 上海: 复旦大学出版社, 2022.

[3] 谢启鸿. 高等代数在线课程 (易班优课). https://xueyuan.yooc.me/courses/FDDX/FDDXLG1743/20160505/about. 2016.

[4] 谢启鸿. 高等代数习题课在线课程 (哔哩哔哩). https://www.bilibili.com/video/BV1X7411F7fK. 2020–2021.

[5] 谢启鸿. 高等代数官方博客. https://www.cnblogs.com/torsor/.

[6] 曹志浩. 数值线性代数. 上海: 复旦大学出版社, 1999.

[7] 谢启鸿. 浅谈高等代数命题中的若干技巧. 大学数学, 2013, 29(3): 127–130.

[8] 谢启鸿. 秩在矩阵相似中的应用. 高等数学研究, 2012, 15(1): 30–32.

[9] 谢启鸿, 邵美悦. 从一个初等问题看高等代数中的若干技巧. 高等数学研究, 2013, 16(4): 53–55.

[10] 谢启鸿. 文字行列式求值中的两个技巧. 大学数学, 2013, 29(4): 94–98.

[11] 谢启鸿, 杨翎. 从两道习题看矩阵可对角化的判定. 高等数学研究, 2014, 17(4): 82–85.

[12] 谢启鸿, 杨翎. 线性变换的特征多项式诱导的直和分解. 高等数学研究, 2015, 18(1): 40–43.

[13] 谢启鸿. 从一道习题的推广看矩阵的标准形理论. 高等数学研究, 2016, 19(2): 1–3.

[14] 谢启鸿. 利用多项式的技巧替代摄动法. 大学数学, 2014, 30(6): 52–55.

[15] 谢启鸿. 从 AB 与 BA 谈高等代数的教学串联. 高等数学研究, 2015, 18(6): 29–32.

[16] 谢启鸿. 一道高等代数考题的命题思路及分析. 大学数学, 2015, 31(1): 70–74.

[17] 谢启鸿. 循环子空间的若干应用. 大学数学, 2016, 32(1): 1–6.

[18] 谢启鸿. 高等代数中若干概念在基域扩张下的不变性. 大学数学, 2015, 31(6): 50–55.

[19] 谢启鸿. Galois 理论在高等代数中的若干应用. 大学数学, 2016, 32(6): 8–12.

[20] 谢启鸿. 循环子空间的进一步应用. 大学数学, 2017, 33(1): 17–25.

[21] 谢启鸿. 一道高等代数常见习题的自然延伸. 大学数学, 2019, 35(6): 96–99.

[22] 谢启鸿. 可对角化的其他判定准则及其应用. 大学数学, 2021, 37(5): 78–83.