实数完备性基本定理的相互证明（30 个）

摘要： 这 6 个定理虽然出发的角度不同，但描写的都是实数连续性这同一件事，它们之间是相互等价的，即任取其中两个定理，它们可以相互证明。它们在证明过程中相互联系。对同一个定理的证明，虽然不同的定理作为工具会使证明有简繁之分，有的用的是类似的证明方法，有的出发点与站的角度不同，但最后却都能殊途同归。而有时使用同一个定理，也可能有不同的方法。即使方法相同，还可以有不同的细节。作为工具，它们又各具特点。而这些都是值得我们去注意与发现。

1　**确界原理**非空有上(下)界数集，必有上(下)确界。

2　**单调有界原理** 任何单调有界数列必有极限。

3　**区间套定理**　若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套，则存在唯一一点 ξ，使得 $\xi\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$。

4　**Heine-Borel 有限覆盖定理** 设$[a,b]$是一个闭区间，H 为$[a,b]$上的一个开覆盖，则在H中存在有限个开区间，它构成$[a,b]$上的一个覆盖。

5　**Weierstrass 聚点定理**（**Bolzano 致密性定理**有界无穷数列必有收敛子列。） 直线上的有解无限点集至少有一个聚点。

6　**Cauchy 收敛准则**数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow$对任给的正数ε　，总存在某一个自然数N，使得$\forall m,n>N$时，都有$|a_m-a_n|<\varepsilon$。

一. 确界原理

1. 确界原理证明单调有界定理

证 不妨设$\{a_n\}$为有上界的递增数列. 由确界原理, 数列$\{a_n\}$有上确界, 记 $a=\sup\{a_n\}$. 下面证明a 就是$\{a_n\}$ 的极限. 事实上, 任给 $\varepsilon>0$, 按上确界的定义, 存在数列$\{a_n\}$中某一项a_N, 使得$a-\varepsilon>a_N$. 又由$\{a_n\}$的递增性, 当$n\geqslant N$ 时有$a-\varepsilon<a_N\leqslant a_n$.

另一方面, 由于a 是$\{a_n\}$的一个上界, 故对一切a_n都有$a_n\leqslant a<a+\varepsilon$. 所以当 $n\geqslant N$ 时有

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

这就证得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 同理可证有下界的递减数列必有极限, 且其极限即为它的下确界.

2. 确界原理证明区间套定理

证明：1　设$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$是一个闭区间套，即满足：

1）　$\forall n$，$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$；

2）　$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

我们证明，存在唯一的实数ξ，使得$\xi\in[a_n,b_n]$，（$n=1,2,\cdots$）

存在性：令$S=\{a_n\}$，显然，S非空且有上界（任一b_n都是其上界）. 据确界原理，S

有上确界，设sup S ＝ξ. 现在，我们证明ζ属于每个闭区间［a_n，b_n］，（n＝1，2，…）显然
$a_n \leqslant \xi$，（n ＝1，2，…） 所以，我们只需证明对一切自然数n，都有$\xi \leqslant b_n$.
事实上，因为对一切自然数n，b_n都是S 的上界，而上确界是上界中最小者，因此必有$\xi \leqslant b_n$
，故我们证明了存在一实数ξ，使得$\xi \in [a_n, b_n]$，（n ＝1，2，…）

唯一性： 假设还有另外一点$\xi' \in R$且$\xi' \in [a_n, b_n]$，则$|\xi - \xi'| \leq |a_n - b_n| \to 0$,

即$\xi = \xi'$。从而唯一性得证。

3. 确界原理证明有限覆盖定理

即闭区间［a，b］的任一开覆盖H 都有有限的子覆盖
证① 令S ＝｛x｜a＜x ≤b，［a，x］能被H 中有限个开区间覆盖｝；
②显然S有上界 因H 覆盖闭区间［a，b］，所以，存在一个开区间（α，β）∈H 使 a ∈（α，β） 取x ∈（α，β），则［a，x］能被H中有限个开区间覆盖 从而，x ∈S，故S 非空;
③ 由确界原理存在ζ＝sup S；
④ 现证ζ＝b 用反证法 若ζ≠b，则a＜ζ＜b 由H 覆盖闭区间［a，b］，一定存在（α_1，β_1）∈H，使ζ∈（α_1，β_1） 取x_1，x_2使$\alpha < x_1 < \zeta < x_2 < \beta_1$
，且$x_1 \in S$ 则［a，x_1］能被H 中有限个开区间覆盖，把（α_1，β_1）加进去，就推得$x_2 \in S$ 这与ζ ＝sup S 矛盾，故ζ＝b，即定理结论成立

4. 确界原理证明聚点定理

证 设S是直线上的有界无限点集，则由确界原理有$\eta = \sup S, \xi = \inf S$。若$\eta, \xi$中有一点不是$S$的孤立点，则显然就是$S$的一个聚点。

否则，令$E := \{x \in R | S$ 中仅有有限个数小于$x\}$。显然E非空且有上界。令$\eta' = \sup E$，则由E的构造方法可知，$\forall \varepsilon > 0$必有$\eta' + \varepsilon \notin E$，即$S$中有无限个数小于$\eta' + \varepsilon$大于$\eta'$。所以$(\eta' - \varepsilon, \eta' + \varepsilon)$中含有$S$的无限个数，故$\eta'$是$S$的聚点。

5. 确界原理证明Cauchy收敛准则

即数列｛x_n｝收敛 ∀ε＞0，∃N，当n，m ＞N 时有｜$x_n - x_m$｜＜ε
必要性:略
充分性:
① 构造非空有界数集S，因为欲证明数列｛x_n｝收敛，故数集S 必须含有数列｛x_n
中的无限多个数，为此，令S ＝ x｜｛（－∞，x）∩｛x_n｝是空集或有限点集｝；
②由于满足Cauchy收敛准则充分条件的数列是有界的，故知数列｛x_n｝的下界a ∈S，上界b也是S 的上界,所以S 是非空有上界的数集 由确界原理数集S 有上确界ζ＝sup S；
③ 对ε＞0，（－∞，ζ）∩｛x_n｝是无限点集，否则，就与ζ＝sup S矛盾
因（－∞，ζ－ε）∩｛x_n｝至多含有｛x_n｝的有限多个点 故（ζ－ε，ζ＋ε）含有

$\{x_n\}$的无限多个点　设$x_{n_k} \in (\zeta-\varepsilon, \zeta+\varepsilon)$，$k=1, 2, \cdots$，且$n_1 < n_2 < \cdots$
取$N_1 = \max\{N, n_1\}$，则当$n > N_1$时，总存在$n_k > N_1$使
$x_n - \zeta \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \zeta| < 2\varepsilon$，
因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \zeta$.

二.单调有界定理

6．单调有界定理证明确界定理

证：我们不妨证明非空有上界的数集S必有上确界

(1).欲求一实数使它是非空数集S的上确界　利用非空有上界的数集S，构造一数列使其极限为我们所要求的实数

选取性质p：不小于数集S中的任一数的有理数

将具有性质p 的所有有理数排成一个数列$\{r_n\}$，并令$\{x_n\} = \max\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$，则得单调递增有上界的数列$\{x_n\}$；

(2) 由单调有界定理得，$\zeta = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，且对任意的自然数n有$r_n \leqslant x_n \leqslant \zeta$；

(3) ζ是数集S 的上确界. 用反证法，若有数$x_0 \in S$ 使$x_0 > \zeta$，取$\varepsilon = (x_0 - \zeta)/2$，则存在一个有理数$r_N$，使$\zeta \leqslant r_N < \zeta + \varepsilon = (x_0 + \zeta)/2 < (x_0 + x_0)/2 = x_0$，从而$r_N < x_0$，这与$r_N$是数集S 的上界矛盾　所以对一切$x \in S$，都有$x \leqslant \zeta$，即$\zeta$是数集S的上界.

任给$\varepsilon > 0$，若$\forall x \in S$，都有$x \leqslant \zeta - \varepsilon$，则存在有理数$r'$，使$\zeta - \varepsilon < r' < \zeta$，即$x \leqslant \zeta - \varepsilon < r' < \zeta$，我们就找到$r' \in S$这与（若$\forall x \in S$，都有$x \leqslant \zeta - \varepsilon$）矛盾，所以存在$x' \in S$，使$x' > \zeta - \varepsilon$，即$\zeta$是数集S 的最小上界

于是，我们证明了所需结论.

7.单调有界定理证明区间套定理

若$\{[a_n, b_n]\}$是一个区间套，则在实数系中存在唯一的一点ξ，使得$\xi \in [a_n, b_n]$，$n = 1, 2, \cdots$，即

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n, \quad n = 1, 2, \cdots. \quad (1)$$

证 ：$\{a_n\}$为递增有界数列，依单调有界定理，$\{a_n\}$有极限ξ，且有

$a_n \leqslant \xi$，$n = 1, 2, \cdots$. (2)

同理，递减有界数列$\{b_n\}$也有极限，并按区间套的条件有

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$， (3)

且$b_n \geqslant \xi$，$n = 1, 2, \cdots$. (4)

联合(2)、(4)即得(1)式.

最后证明满足(2)的ξ是唯一的.设数ξ' 也满足

$a_n \leqslant \xi' \leqslant b_n$，$n = 1, 2, \cdots$，

则由(1)式有

$|\xi - \xi'| \leqslant b_n - a_n$，$n = 1, 2, \cdots$.

由区间套的条件得

$|\xi-\xi'|\leq\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

故有 $\xi'=\xi$.

8.单调有界定理证明有限覆盖定理,

即闭区间［a，b］的任一开覆盖H 都有有限的子覆盖

证:(1)设有理数 $r\in(a,b]$,使闭区间［a，r］能被H 中有限个开区间覆盖 把［a，b］上的这种有理数的全体排成一个数列 $\{r_n\}$,因为存在一个开区间 $(\alpha,\beta)\in H$ 使 $r_n\in(\alpha,\beta)$，在 $(\alpha,\beta)\cap[a,b]$ 内含有无穷多个有理数，所以 $\{r_n\}$ 是存在的；

(2)将数列 $\{r_n\}$ 单调化，取 $x_n=\max\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$，则数列 $\{x_n\}$ 单调递增有上界；

(3) 由单调有界定理得，$\zeta=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 且 $r_n\leqslant x_n\leqslant\zeta$，$n=1,2,\cdots$；

(4) 因 $x_n\in[a,b]$，$n=1,2,\cdots$，由(3)得 $\zeta\in[a,b]$，故ζ必在H 中的某个开区间 (α_1,β_1) 中 再由（3），一定有 $r_N\in\{r_n\}$，使 $\alpha_1<r_N\leqslant\zeta$ 又由①［a，r_n］能被H 中有限个开区间覆盖 故只需把 (α_1,β_1) 加进去 ［a，ζ］能被H 中有限个开区间覆盖

若 $\zeta=b$，则说明［a，b］能被H 中有限个开区间覆盖 用反证法 若 $\zeta<b$，由于［a，b］内的有理数在［a，b］上处处稠密，故一定存在有理数 r'，使得 $\zeta<r'<\min\{\beta,b\}$，这样一来，［a，r'］能被H 中有限个开区间覆盖，故 $r'\in\{r_n\}$，与（3）矛盾 所以，$\zeta=b$。

9.单调有界定理证明聚点定理

证明：设S 是一有界无限点集，则在S 中选取一个由可数多个互不相同的点组成的数列 $\{a_n\}$，显然数列 $\{a_n\}$ 是有界的

下面我们从 $\{a_n\}$ 中抽取一个单调子列，从而由单调有界定理该子列收敛，最后我们证明该子列的极限值，就是有界无限点集S的聚点 分两种情况来讨论

1）如果在 $\{a_n\}$ 的任意一项之后，总存在最大的项（因S 是有界的且 $\{a_n\}$ S，这是可能的），设 a_1 后的最大项是 a_{n_1}；a_{n_1} 后的最大项是 a_{n_2}，且显然 $a_{n_2}\leqslant a_{n_1}$；

一般地，a_{n_k} 后的最大项记为 $a_{n_{k+1}}\leqslant a_{n_k}$，$(k=1,2,\cdots)$

这样，就得到了 $\{a_n\}$ 的一个单调递减的子数列 $\{a_{n_k}\}$，因为 $\{a_n\}$ 有界，根据单调有界定理知，$\{a_{n_k}\}$ 收敛

2）如果1）不成立 即从某一项以后，任何一项都不是最大的（为证明书写简单起见，不妨设从第一项起，每一项都不是最大项） 于是，取 $a_{n_1}=a_1$，因 a_{n_1} 不是最大项，所以必存在另一项 $a_{n_2}>a_{n_1}$ $(n_2>n_1)$，又因为 a_{n_2} 也不是最大项，所以又有 $a_{n_3}>a_{n_2}$ $(n_3>n_2)$，…… 这样一直作下去，就得到 $\{a_n\}$ 的一个单调递增的子列 $\{a_n\}$，且有上界，根据单调有界定理知，$\{a_n\}$ 收敛，

总之不论 $\{a_n\}$ 属于情形1）还是情形2），都可作出 $\{a_n\}$ 的一个单调收敛的子列 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n_k}=a$，今证a是S的聚点。对 $\varepsilon>0$，存在自然数K，使得 $k>K$

时，$a-\varepsilon < a_{n_k} < a+\varepsilon$，
若这时｛a_{n_k}｝单调递减，$a_{n_{k+1}} < a+\varepsilon$（$k > K$）且 $a_{n_{k+1}} \neq a$，$a_{n_{k+1}} \in S$，
即 a 的 ε 邻域内含有 S 中异于 a 的点，故 a 是 S 的聚点。
｛a_{n_k}｝单调递增时，类似可证。

10.单调有界定理证明Cauchy收敛准则

必要性：略
充分性：先证明柯西数列$\{a_n\}$是有界的。取ε=1，因$\{a_n\}$是柯西数列，所以存在某个正整数No，当n>No
时有$|a_n - a_{No+1}| < 1$，亦即当n>No时$|a_n| \leqslant |a_{No+1}|+1$即$\{a_n\}$有界。
不妨设$a_n \in [a,b]$，我们可用如下方法取得$\{a_n\}$的一个单调子列$\{a_{n_k}\}$
(1)取$\{a_{n_k}\} \in \{a_n\}$使$[a, a_{n_k}]$或$[a_{n_k}, b]$中含有无穷多的$\{a_n\}$的项
(2)在$[a, a_{n_k}]$或$[a_{n_k}, b]$中取得$a_{n_{k+1}} \in \{a_n\}$且满足条件(1)并使$n_{k+1} > n_k$，然后就有
$a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$
不断地进行（1），（2）得到一单调递增的子列$a_{n_k} < a_{n_{k+1}} < a_{n_{k+2}} < \cdots$

因为$a_{n_k} \in \{a_n\}$，而$\{a_{n_k}\}$是一个单调有界数列，由单调有界定理知a_{n_k}收敛，

设$\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n_k} - a| = 0$（1）

下证$\{a_n\}$收敛于a

因为$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k}=a$ 则对$\forall\varepsilon>0\exists$正整数K，当k>K时，$|a_{n_k}|$另一方面由于$\{a_n\}$是柯西列，所以

存在正整数N，当n，$n_1>N_1$ 时有$|a_n - a_{n_1}|<\frac{\varepsilon}{2}$ 由（1）就可得当$n_1 > N$ 有 $|a_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

所以当$n>\max(N, N_1)$时$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_1}|+|a_{n_1} - a|<\varepsilon$
故$\{a_n\}$收敛于a

三．区间套定理

11.区间套定理证明确界原理

即非空有上界的数集 S 必有上确界，非空有下界的数集 S 必有下确界
证：仅证明非空有上界的数集 S 必有上确界
（1）要找一数 ζ，使其是数集 S 的上确界　ζ 是 S 的上确界就要满足上确界定义中的两个条件：大于 ζ 的数不在 S 中，ζ 的任何邻域内有 S 中的点　这两条即为性质 **p**．
如果 ζ 在闭区间［a，b］中，则闭区间［a，b］应有性质：任何小于 a 的数不在 S 中，［a，b］中至少含有 S 中的一个点，该性质即为$\mathbf{p}^*$
取 S 的上界为 b，且 b ∈ / S，取 a ∈ S，a ＜ b，则闭区间［a，b］
有性质$\mathbf{p}^*$；
（2）将闭区间［a，b］等分为两个闭区间，则至少有一个闭区间［a_1，b_1］也有性质 p，如此继续得一闭区间列，满足
［a，b］⊃［a_1，b_1］⊃ … ⊃［a_n，b_n］⊃…；

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b_n-a_n)=0$$

(3)由区间套定理的得ζ属于所有的闭区间［a_n，b_n］，n=1,2,⋯,并且每个闭区间［a_n，b_n］都有性质$\mathbf{p}^*$

（4）因为$a_n\le\zeta\le b_n$，n=1,2,⋯，且

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

由于对$\forall x\in S$,有$x\le b_n$,从而$x\le\lim_{n\to\infty}b=\zeta$；又对$\forall\varepsilon>0$,总存在N,使得$\zeta-\varepsilon<a_N$ 故存在$x_0\in S\cap[a_N, b_N]$，于是$x_0\ge a_N>\zeta-\varepsilon$. 因而ζ=sups

12. 区间套定理证明单调有界定理

2　设｛x_n｝是单调有界数列，不妨设其为单调递增且有上界b_1　现在我们来构造一个闭区间套

在｛x_n｝中任取一项记作a_1，这时$a_1<b_1$，于是，以a_1和b_1为端点的闭区间［a_1，b_1］内一定含有数列｛x_n｝中的无限多项　将区间［a_1，b_1］二等分，得闭区间

$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$，$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$，

由于｛x_n｝单调递增，故$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$和$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$中只有一个包含｛x_n｝的无限多项，我们记该区间为［a_2，b_2］　再将［a_2，b_2］二等分，在所得区间中只有一个包含｛x_n｝的无限多项，记该区间为［a_3，b_3］如此继续，得一闭区间列：［a_1，b_1］，［a_2，b_2］，…，［a_n，b_n］，…，

满足［a_{n+1}，b_{n+1}］⊂［a_n，b_n］，（n＝1，2，…）；

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

故$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$是一个闭区间套，由闭区间套定理，存在唯一实数ζ，使得

ζ∈［a_n，b_n］，（n＝1，2，…）

现在证明$\lim_{n\to\infty}x_n=\zeta$　因$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

，故对　ε＞0，存在自然数N′，当n＞N′时，｜b_n-a_n｜＜ε

另外，由于［a_n，b_n］包含递增数列｛x_n｝的无限多项，所以必存在N″，当n＞N″时，有$a_n\leqslant\zeta\leqslant b_n$，

取N＝max｛N′，N″｝，当n＞N 时有｜$x_n-\zeta$｜＜b_n-a_n｜＜ε，

此即$\lim_{n\to\infty}x_n=\zeta$

13. 区间套定理证明有限覆盖定理

即闭区间［a，b］的任一开覆盖H 都有有限的子覆盖

证1用反证法

(1)要证明的整体性质p是：闭区间［a，b］能用H 中的有限个开区间覆盖.与p相反的性质p^{-1}是：闭区间［a，b］不能用H中的有限个开区间覆盖；

(2) 假设闭区间［a，b］有性质p^{-1} 将闭区间［a，b］等分为两个闭区间，则至少有一个闭区间［a_1，b_1］也有性质p^{-1} 否则，［a，b］有性质p 如此继续得一闭区间列，使每个闭区间都有性质

p^{-1}，且［a，b］⊃［a_1，b_1］⊃ … ⊃［a_n，b_n］⊃…；

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b_n-a_n)=0$$

(2)由闭区间套定理得数ξ属于所有的闭区间［a_n，b_n］，n＝1，2，…，并且每个闭区间［a_n，b_n］有性质p^{-1}；

④ 由ζ∈［a，b］和H 是［a，b］的开覆盖，有ζ属于H 中的某个开区间

$\zeta\in\bigcap_{n=1}^{\infty}$［$a_n$，$b_n$］$\subset(\alpha_1,\beta_1)$，和

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

可知，存在自然数m，使［a_m，b_m］⊂（α_1，β_1） 这与［a_m，b_m］具有性质p^{-1}矛盾

14. 区间套定理证明聚点定理

证明(反证法)：已知∃a，b，使$a\le x_n\le b$。设[a，b]没有E的有限子覆盖，记

[a，b]=［a_1，b_1］，二等分［a_1，b_1］，其中必有一区间含$\{x_n\}$的无穷多项，记其为［a_2，b_2］，二等分［a_2，b_2］，……如此继续下去，便得区间套［a_n，b_n］，满足$\forall n$，［a_n，b_n］含$\{x_n\}$的无穷多项。由区间套定理可得，∃唯一的$r\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，使$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=r$。

因此$\exists n_1$，使$r-1\prec a_{n_1}\le r\le b_{n_1}\prec r+1$。

这时存在$x_{n_1}\in[a_{n_1},b_{n_1}]$，归纳地，∀k>1，$\exists n_k$，使$r-\frac{1}{k}<a_{n_k}\le r\le b_{n_k}<r+\frac{1}{k}$

由$[a_{n_k},b_{n_k}]$含$\{x_n\}$的无穷多项，知$a_{n_k}\in[a_{n_k},b_{n_k}]$，由$a_{n_k}\le x_{n_k}\le b_{n_k}$，

令$k\to\infty$，$\lim_{n\to\infty}x_{n_k}=r$，所以$\{x_n\}$存在收敛子数列。定理证完

15. 区间套定理证明Cauchy收敛准则

证 设$\{x_n\}$为 **Cauchy** 基本列，即$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N$有

$|x_n-x_N|\le\varepsilon$，即$x_n\in[x_N-\varepsilon,x_N+\varepsilon]$。

定义性质P：$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N$有$x_n\in[x_N-\varepsilon,x_N+\varepsilon]$。则

（1）　令$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，则$\exists N_1$使得$[x_{N_1}-\dfrac{1}{2},x_{N_1}+\dfrac{1}{2}]$具有性质$P$，不妨记此区间为$[\alpha_1,\beta_1]$。

（2）　令$\varepsilon=\dfrac{1}{2^2}$，　则$\exists N_2(>N_1)$使得$[x_{N_2}-\dfrac{1}{2^2},x_{N_2}+\dfrac{1}{2^2}]$具有$P$，不妨记此区间为$[\alpha_2,\beta_2]$。

⋮。。。

(k):　令$\varepsilon=\dfrac{1}{2^k}$，则］$\exists N_k(>N_{k-1})$使得$[x_{N_k}-\dfrac{1}{2^k},x_{N_k}+\dfrac{1}{2^k}]$具有$P$，不妨记此区间为$[\alpha_k,\beta_k]$。

由此可得一闭区间套$\{[\alpha_n,\beta_n]\}$满足

(i)　$[\alpha_n,\beta_n]\supset[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]$;

(ii)　$(\beta_n-\alpha_n)=\dfrac{1}{2^n}$;

(iii)　$[\alpha_n,\beta_n]$具有性质P，即含有某个$N>0$后的所有项。

由闭区间套定理可知存在唯一的$\xi\in[\alpha_n,\beta_n]$。从而$x_n\to\xi,(n\to\infty)$。

四. 有限覆盖定理

16. 有限覆盖定理证明确界原理

证明：设Ｓ 为非空有上界的数集，我们证明Ｓ 有上确界

　　不妨设Ｓ没有最大值　设ｂ为Ｓ的一个上界，下面用反证法来证明supＳ ＝ζ存在　假设supＳ 不存在，取ａ ∈Ｓ　对任一ｘ ∈［ａ，ｂ］，依下述方法确定一个相应的邻域

　　$U_x=(x-\delta,\ x+\delta)$

１）若ｘ∈Ｓ，因Ｓ中没有最大值，所以至少存在一点ｘ′∈Ｓ，使ｘ′>ｘ，这时取

　　δ＝ｘ′－ｘ；

２）若ｘ∈／Ｓ且ｘ不是Ｓ的上界，同样存在ｘ′∈Ｓ，使ｘ＜ｘ′，这时取δ＝ｘ－ｘ′；

３）若ｘ∈Ｓ，且ｘ是Ｓ的上界，因supＳ存在，故有δ＞０，使得$U_x=(x-\delta,\ x+\delta)$中的点都是Ｓ 的上界．

　　于是我们得到了［ａ，ｂ］的一个开覆盖：

$H=\{U_x=(x-\delta,\ x+\delta)\mid x\in[a,b]\}$

根据有限覆盖定理，Ｈ 有有限子覆盖：

$\widetilde{H}=\{U_{n_k}=(x_k-\delta_{x_k},\ x_k+\delta_{x_k})\mid k=1,2,\cdots,n\}$

将U_x分成两类, 若U_x是３）中所确定的开区间，我们把U_x称为是第二类的，否则称为是

第一类的，显然 a 所属的邻域U $_{x_i}$是第一类的， b 所属的邻域U $_{x_i}$是第二类的，所以至少有一个第一类邻域与某个第二类邻域相交，这是不可能的.

17. **有限覆盖定理**证明**单调有界定理**

即单调有界数列必有极限

证：不妨设数列{ x_n }单调递增有上界M，且若{ x_n }中有最大值，则易知{ x_n }收敛于某常数，从而定理得证，一下假设{ x_n }中没有最大值，我们用反证法来证明

（1）设 { x_n }没有极限。对任意取定自然数n_0有x_{n_0}<M，下面作闭区间$[x_{n_0}, M]$的对应开覆盖H. 设$x \in [x_{n_0}, M]$，

1）若$x = x_{n'}$(n'是自然数)。因为{ x_n }中没有最大值，说以至少存在某个自然数n''，使得$x_{n'} \le x_{n''}$，这时取 $\delta = x_{n'} - x_{n''}$得x的领域（x- δ , x+ δ ）

2)若$x \notin$ { x_n }且x不是{ x_n }的上界，同样存在$x_{n'} \in$ { x_n }，使$x < x_{n''}$，取 $\delta = x_{n'} - x_{n''}$得x的领域（ x － δ ， x ＋ δ ）

3）若$x \neq x_{n'} \notin$ { x_n }且是{ x_n }的上界。因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在，故必存在 x 的邻域

（ x － δ ， x ＋ δ ），使得它不含有 { x_n } 中的任何项，于是我们得到了闭区间 $[x_{n_0}, M]$ 的一个开覆盖

② 由有限覆盖定理，选出有限个开区间：

（ x_1 － δ_1 ， x_1 ＋ δ_1 ），…，（ x_n － δ_n ， x_n ＋ δ_n ）

也能覆盖闭区间［x_{n_0}， M］

③ 将这有限个开区间分成两类：若（ x_i － δ_i ， x_i ＋ δ_i ）是第 3 ）中情形，则称之为第 1 类；否则称为第 2 类

显然x_{n_0}所属的邻域是第 1 类　M 所属的邻域是第 2 类　但因

（ x_1 － δ_1 ， x_1 ＋ δ_1 ），…，（ x_n － δ_n ， x_n ＋ δ_n ）覆盖了［ x_{n_0}， M］，所以至少有一个第 1 类开区间与某个第 2 类开区间相交，这是不可能的，矛盾。

18. **有限覆盖定理**证明**区间套定理**

即若$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$是一闭区间套，则存在唯一ξ属于所有的闭区间［ a_n， b_n ］， n ＝1 ， 2 ，…

证:用反证法证明　①假设［ a_n， b_n ］， n ＝1 ， 2 ，…，没有公共点，

则［ a_1， b_1 ］上的任何一点都不是｛［ a_n， b_n ］｝的公共点，从而，总存在一个开区间（ x － δ_x， x ＋ δ_x ），使得（ x － δ_x， x ＋ δ_x ）不与所有的［ a_n， b_n ］相交　即存在［ a_{n_x}， b_{n_x} ］，使［ a_{n_x}， b_{n_x} ］∩（ x － δ_x， x ＋ δ_x ）＝　φ，

现让 x　取遍［ a_1， b_1 ］上的所有点，就得到一个开区间集：

H　＝｛（ x － δ_x， x ＋ δ_x ）： x　取遍［ a_1， b_1 ］上的所有点｝

② 由有限覆盖定理，选出有限个开区间：

$\tilde{H}$＝｛（ x_k － δ_{x_k}， x_k ＋ δ_{x_k} ）： k ＝1 ， 2 ，…m｝，

覆盖闭区间［ a ， b ］，其中（ x_k － δ_{x_k}， x_k ＋ δ_{x_k} ）∩［ $a_{n_{x_k}}$， $b_{n_{x_k}}$ ］＝φ　；

③ 因为［ $a_{n_{x_k}}$， $b_{n_{x_k}}$ ］只有有限个，由闭区间套定理的条件，它们是一个包含着一个，因此其中一定有一个最小区间，设为［ a_{n_0} b_{n_0} ］，这时，

$[a_{n_0}, b_{n_0}] \cap (x_k-\delta_{x_k}, x_k+\delta_{x_k}) = \phi$ ，$k=1，2，\cdots m$
从而，$[a_{n_0}, b_n] \cap \bigcup_{k=1}^{n} (x_k-\delta_{x_k}, x_k+\delta_{x_k}) = \phi$
这就与$[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset [a_1, b_1]$矛盾
所以，$[a_n, b_n]$，$n=1，2，\cdots$，应有公共点

19. 有限覆盖定理证明聚点定理

证　设E为有界无穷点集，因此存在$M>0$，使得$E\subset[-M,+M]$．由本节习题6知，$[-M,+M]$的聚点均含于$[-M,+M]$，故E若有聚点，必含于$[-M,+M]$．

反证法：若E无聚点，即$[-M,+M]$中任何一点都不是E的聚点，则对于$\forall x\in[-M,+M]$，必有相应的$\delta_x>0$，使得$U(x;\delta_x)$内至多只有点$x\in E$（若$x\notin E$，则$U(x;\delta_x)$中不含E中之点）．所有这些邻域的全体形成$[-M,+M]$的一个无限开覆盖：

$$H=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\mid x\in[-M,+M]\}.$$

由有限覆盖定理知，H中存在有限个开区间能覆盖$[-M,+M]$．记

$$\overline{H}=\{(x-\delta_{x_k},x+\delta_{x_k})\mid x_k\in[-M,+M],k=1,2,\cdots,N\}\subset H$$

为$[-M,+M]$的一个有限开覆盖，则$\overline{H}$也覆盖了E．由$U(x;\delta_x)$的构造含意知，$\overline{H}$中N个邻域至多有N个点属于E，这与E为无穷点集相矛盾．因此，在$[-M,+M]$内一定有E的聚点．

由此聚点定理得证．

20. 有限覆盖定理证明Cauchy收敛准则

证(反证法)　假设柯西列$\{x_n\}$不收敛，

易证$\{x_n\}$为有界无穷数列，取ε=1，因$\{a_n\}$是柯西数列，所以存在某个正整数No，当n>No时有$|a_n-a_{No+1}|<1$，亦即当n>No时$|a_n|\leqslant |a_{No+1}|+1$即$\{a_n\}$有界。

即存在闭区间$[a,b]$使得$\{x_n\}\subset[a,b]$。则$\forall x\in[a,b]$，$\exists U(x,\delta)$ 使得$U(x,\delta)$中只含有$\{x_n\}$中的有限多项(否则，若$\forall\delta>0, U(x,\delta)$都有$\{x_n\}$中的无限多项，则易证$\{x_n\}$收敛，这与假设矛盾)。

从而得$[a,b]$的一个开覆盖$\mathrm{H}:=\{U(x,\delta)\mid x\in[a,b]\}$

由 **Heine–Borel** 有限覆盖定理知，存在H的一个有限子覆盖

$$\mathrm{H}_1:=\{U(x_i,\delta_i)\mid x_i\in[a,b], i=1,2,\cdots,k\}。$$

所以$\cup\mathrm{H}_1$只含有$\{x_n\}$中的有限多个点，这显然与$(\cup\mathrm{H}_1)\supset[a,b]\supset\{x_n\}$是矛盾的，假设错误，因此$\{x_n\}$必收敛。

五. 聚点定理

21. 聚点定理证明确界原理

证 设S是一个有上界数集，则$\exists b\in R$使得$\forall x\in S$有$x<b$，取$a\in S$构造区间$[a,b]$。定义性质P：区间中至少有一个数属于S且区间的右端点为S的一个上界。

利用二等分法容易构造出满足性质P的区间套$\{[a_n,b_n]\}$

定义性质 P： 不能用H中有限个开区间覆盖。

(1) 将$[a,b]$等分为两个子区间，则至少有一个具有性质P，不妨记该区间为$[a_1,b_1]$，则 $[a_1,b_1]\subset[a,b]$；

(2) 将$[a_1,b_1]$等分为两个子区间，则至少有一个具有性质P，不妨记该区间为$[a_2,b_2]$，则 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$；

$\vdots$

n) 将$[a_{n-1},b_{n-1}]$等分为两个子区间，则至少有一个具有性质 P，不妨记该区间为$[a_n,b_n]$，则 $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$；

由此可得一个区间套$\{[a_n,b_n]\}$且满足$b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to 0$ (1)

显然$\{b_n\}\subset[a,b]$且单调递减有下界。我们证明$\exists\xi\in R,\ni b_n\to\xi,(n\to\infty)$。事实上，不妨设$\{b_n\}$有无穷个数，由聚点原理知$\{b_n\}$有聚点$\xi$。

因此$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，使得$b_N\in U(\xi,\varepsilon)$且$b_N>\xi$。由于$\{b_n\}$单调递减，则易证$\forall n>N$ 有 $b_n\in U(\xi,\varepsilon)$。

由于b_n都为 S 的上界，($\xi\in U(\xi,\varepsilon)$)所以$\xi$也为$S$的上界。由(1) 易证$a_n\to\xi,(n\to\infty)$。故 $\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1>0,\forall n>N_1$ 有 $a_n\in U(\xi,\varepsilon)$。从而可知，$\forall n>N+N_1,\exists x\in S,\ \ x\in[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)$。即$\xi-\varepsilon<x\le\xi$

故ξ为S的上确界。

22. 聚点定理证明单调有界定理

证 不妨设$\{x_n\}$是单调有上界无穷数列，即$\exists a,b\in R$，使得$\{x_n\}\subset[a,b]$。故由聚点原理可知$\exists\xi\in R,\ni\xi$为$\{x_n\}$的聚点，即$\forall\varepsilon>0,U(\xi,\varepsilon)$含有$\{x_n\}$中的无限多项。由单调性易得知$U(\xi,\varepsilon)$外最多有$\{x_n\}$中的有限项，因此又极限的一种等价定义得：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$$

23. 聚点定理证明区间套定理

即若｛［ａｎ，ｂｎ］｝是一闭区间套，则存在唯一ζ属于所有的闭区间［ａｎ，ｂｎ］，ｎ＝１，２，…

证：设Ｓ＝｛ａｎ｝∪｛ｂｎ｝　则Ｓ是有界无限点集　由聚点定理得数集Ｓ聚点ζ　若存在一个ａＮ，使ｂｎ＞ａＮ＞ζ（ｎ＝１，２，…）

再取ε＝$\frac{1}{2}$（ａＮ－ζ），由｛ａｎ｝的单调性，当ｎ＞Ｎ 时，ａｎ＞ａＮ＞ζ＋ε这样，（ζ

$-\varepsilon, \zeta+\varepsilon)$内至多有S 中的有限多个点　这与ζ是聚点矛盾，于是得到$\zeta \geqslant a_n$（$n=1, 2, \cdots$）

同理可证，$\zeta \leqslant b_n$（$n=1, 2, \cdots$）　因此，有$\zeta \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$

唯一性

最后证明满足ξ是唯一的.设数ξ′也满足

$a_n \leqslant \xi' \leqslant b_n,\ n=1,2,\cdots,$　　（1）

因为　$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n,\ n=1,2,\cdots,$　　（2）

则由（1）(2)式有

$|\xi-\xi'| \leqslant b_n-a_n,\ n=1,2,\cdots.$

由区间套的条件得

$$|\xi-\xi'| \leq \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

故有$\xi'=\xi$.唯一性即证。

24.聚点定理证明有限覆盖定理

即闭区间$[a, b]$的任一开覆盖H 都有有限的子覆盖

证① 找一个使它具有与性质p 相反的性质p^{-1}的数集S；

为此我们先证明$\delta>0$，$x\in[a, b]$有开区间$(\alpha_0, \beta_0)\in H$，使$(x-\delta, x+\delta)\subset(\alpha_0, \beta_0)$.否则,$\exists x_1\in[a, b]$对任意的$(\alpha, \beta)\in H$，都有$(x_1-1, x_1+1)\not\subset(\alpha, \beta)$,$\exists x_2\in[a, b]-\{x_1\}$，对任意的$(\alpha, \beta)\in H$，都有$(x_2-\frac{1}{2}, x_2+\frac{1}{2})\not\subset(\alpha, \beta)$,如此继续得一数列$\{x_n\}$，$x_n\in[a, b]-\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$，对任意的$(\alpha, \beta)\in H$，都有$(x_n-\frac{1}{n}, x_n+\frac{1}{n})\not\subset(\alpha, \beta)$

② 显然数集$\{x_n\}$是有界无限点集;

③ 由聚点定理，数列$\{x_n\}$有聚点ζ；

④ 由$\{x_n\}\subset[a, b]$，得$\zeta\in[a, b]$,故存在一个开区间$(\alpha_1, \beta_1)\in H$，使$\zeta\in(\alpha_1, \beta_1)$　令$\delta_1=\min\{\zeta-\alpha_1, \beta_1-\zeta\}$，则存在自然数N，使$N>\frac{2}{\delta_1}$，$x_N\in(\zeta-\frac{\delta_1}{2}, \zeta+\frac{\delta_1}{2})$　从而，$(\zeta-\frac{1}{N}, \zeta+\frac{1}{N})\subset(\alpha_1, \beta_1)$矛盾

现在，我们取$n=[\frac{b-a}{\delta_1}]+1$，$x_i=a+\frac{2i+1}{2n}(b-a)$，$i=0, 1, 2, \cdots$

设$(x_i-\delta, x_i+\delta)\subset(a_i, b_i)\in H$，$i=0, 1, 2, \cdots$　则

$\bigcup_{i=0}^{n-1}(a_i, b_i)\supset\bigcup_{i=0}^{n-1}(x_i-\delta, x_i+\delta)\supset[a, b]$，

因此所需结论成立

25.聚点定理证明Cauchy收敛准则

证明：设$\{x_n\}$是一Cauchy列，则知$\{x_n\}$是有界的　若$\{x_n\}$中只有有限多个项不相

同，那么必有一项譬如x_{n_0}出现无限多次，这时就得到$\{x_n\}$的一个收敛子列$\{x_{n_k}\}$。又因为$\{x_n\}$是Cauchy列，故对 $\varepsilon>0$，存在自然数N，当$n>m>N$ 时
$|x_n-x_m|<\varepsilon$
特别地，当$n>N$，$k>N$ 时由于$n_k>k>N$，从而
$|x_n-x_{n_k}|<\varepsilon$，

令$k\to\infty$，得$|x_n-x_{n_0}|\leqslant\varepsilon$ 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_{n_0}$

若$\{x_n\}$中有无限多项互不相同，则数集$S=\{x_n\}$是一有界无限点集,根据聚点定理，S 至少有一聚点ζ，由聚点的定义，对任意的自然数k，在$U(\zeta,\frac{1}{k})$中，必含有$\{x_n\}$的无限多项，从而在$U(\zeta,\frac{1}{k})$中可选出一项x_{n_k}且$x_{n_k}\neq\zeta$，由于k 的任意性，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=\zeta$ 同上可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\zeta$

六. Cauchy收敛准则

26. Cauchy收敛准则证明确界原理

证：设S 为非空有上界数集. 由实数的阿基米德性,对任何正数α,存在整数K_α,使得$\lambda_\alpha=k_\alpha\alpha$为$S$ 的上界,而$\lambda_\alpha-\alpha=(k_\alpha-1)\alpha$不是$S$ 的上界, 即存在$\alpha'\in S$,使得$\alpha'>(k_\alpha-1)\alpha$.

分别取$\alpha=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$,则对每一个正整数n,存在相应的λ_n,使得λ_n为S 的上界,而$\lambda_n-\frac{1}{n}$ 不是S 的上界,故存在$a'\in S$,使得$a'>\lambda_n-\frac{1}{n}$

又对正整数m，λ_m是S 的上界,故有$\lambda_m\geqslant a'$. 结合(6)式得$\lambda_n-\lambda_m<\frac{1}{n}$;

同理有$\lambda_m-\lambda_n<\frac{1}{m}$
. 从而得
$|\lambda_m-\lambda_n|<\max(\frac{1}{n},\frac{1}{m})$,
于是,对任给的$\varepsilon>0$,存在$N>0$,使得当m，$n>N$ 时有
$|\lambda_m-\lambda_n|<\varepsilon$.
由柯西收敛准则,数列$\{\lambda_n\}$收敛. 记

$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$. (1)

现在证明λ就是S 的上确界. 首先,对任何$a\in S$ 和正整数n 有$a\leqslant\lambda_n$,由(1)式得$a\leqslant\lambda$,即λ是S 的一个上界. 其次,对任何$\delta>0$,由$\frac{1}{n}\to0$ ($n\to\infty$)及(1)式,对充分大的n 同时有

$\frac{1}{n}<\frac{\delta}{2}$，$\lambda_n>\lambda-\frac{\delta}{2}$.

又因$\lambda_n-\frac{1}{n}$不是S 的上界, 故存在$a'\in S$, 使得$a'>\lambda_n-\frac{1}{n}$

. 结合上式得$a'>\lambda-\delta>\lambda-\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{2}=\lambda-\delta$.

这说明λ为S 的上确界. 同理可证: 若S 为非空有下界数集, 则必存在下确界.

27. Cauchy收敛准则证明单调有界定理

证 不妨设$\{x_n\}$为单增有上界数列。假设$\{x_n\}$无极限，Cauchy 收敛准则可知，$\exists\varepsilon_0>0,\forall N>0,\exists m>n>N$，但是 $x_n>x_m+\varepsilon_0$。由N的任意性，不难得到$\{x_n\}$的一个严格单增的子列$\{x_{n_k}\}$，满足 $x_{n_{k+1}}>x_{n_k}+\varepsilon_0>x_{n_{k-1}}+2\varepsilon_0>\cdots>x_{n_1}+k\varepsilon_0$。

由于$\varepsilon_0>0,k>0$， 所以当$k\to\infty$时，有$x_{n_{k+1}}\longrightarrow+\infty$。 这与$\{x_n\}$为有界数列矛盾， 故$\{x_n\}$收敛

28. Cauchy收敛准则证明区间套定理

证 设$\{[a_n,b_n]\}$是 Cantor 区间套。则由$b_n-a_n\to0,(n\to\infty$ 可知，$\forall\varepsilon>0,$ $\exists N>0,\ni n>N$ 时，有$|a_n-b_n|<\varepsilon$。

由于$\{a_n\}$单调递增，$\{b_n\}$中的每一个元素都为$\{a_n\}$的上界。

故$\forall m>n>N$，则有。$a_n\le a_m\le b_m\le b_n$

所以$|a_m-a_n|=a_m-a_n\le b_n-a_n=|a_n-b_n|<\varepsilon$

$|b_m-b_n|=b_n-b_m\le b_n-a_n=|a_n-b_n|<\varepsilon$

故由 Cauchy 收敛准则可知$\{a_n\}$,$\{b_n\}$收敛，$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=r$

下证 $r\in[a_n,b_n]$,用反证法

若$\exists N_1$,使$r<a_{N_1}$,由$\{a_n\}$单调递增知$n>N_1$时$a_n>a_{N_1}>r$

所以$|a_n-r|=a_n-r\ge0$, 两边取极限有$0\le\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-r)<0$,矛盾

同理 若$\exists N_2$,使$r>a_{N_2}$,由$\{b_n\}$单调递减知$n>N_2$时$r>b_n>b_{N_2}$

所以$|b_n-r|=r-b_n\ge0$, 两边取极限有$0\le\lim\limits_{n\to\infty}(r-b_n)<0$，矛盾

故$r\in[a_n,b_n]$,

最后证明满足r是唯一的. 设数r'也满足

$a_n\leqslant r'\leqslant b_n,\ n=1,2,\cdots,$ （1）

因为 $a_n\leqslant r\leqslant b_n,\ n=1,2,\cdots,$ （2）

则由（1）(2)式有

$|r-r'|\leqslant b_n-a_n,\ n=1,2,\cdots.$

由区间套的条件得

$$|r-r'|\le\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

故有$r'=r$.唯一性即证。

29. Cauchy收敛准则证明有限覆盖定理

即闭区间［a，b］的任一开覆盖H 都有有限的子覆盖

证① 在［a，b］上选取一数列｛x_n｝，使得（$x_n-\frac{1}{n}$，$x_n+\frac{1}{n}$）∩［a，b］具有与性质p：闭区间［a，b］能被H中有限个开区间覆盖，

相反的性质p^{-1}：闭区间［a，b］不能被H 中有限个开区间覆盖；

若［a，b］具有性质p^{-1}，则 $x_1\in$［a，b］，使（x_1-1，x_1+1）∩［a，b］具有性质p^{-1} 否则，［a，b］具有性质p，如此继续，得一数列｛x_n｝，使

$$\bigcap_{k=1}^{n}\left(x_k-\frac{1}{k},\ x_k+\frac{1}{k}\right)\cap[a,\ b]$$

具有性质p^{-1}

② 因为｜x_n-x_m｜$\leqslant\max\{\frac{1}{n},\frac{1}{m}\}$

所以，数列｛x_n｝满足Ｃａｕｃｈｙ收敛准则的条件；

③ 由Ｃａｕｃｈｙ收敛准则得，$\zeta=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

④显然，$\zeta\in$［a，b］ 存在开区间（α，β）∈H，使$\zeta\in$（α，β）

又由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\zeta$，存在$x_N$，使（$x_N-\frac{1}{N}$，$x_N+\frac{1}{N}$）⊂（α，β） 这与

($x_N-\frac{1}{N}$，$x_N+\frac{1}{N}$)具有性质p^{-1}矛盾。

30. Cauchy收敛准则证明聚点定理

即任一非空有界无限点集Ｓ 必有聚点

证:① 取ａ为Ｓ的下界，对任意固定的自然数ｎ，存在自然数k_n，使$x_n=a+\frac{k_n}{n}$ 满足

１）Ｓ ∩（x_n，＋∞）至多为有限点集；２）Ｓ ∩（$x_n-\frac{1}{n}$，＋∞）为无限点集

② 由①对任意自然数ｎ、ｍ，$x_n-\frac{1}{n}<x_m$，这是因为，若存在ｎ、ｍ 使$x_n-\frac{1}{n}\geqslant x_m$，

则 Ｓ ∩（$x_n-\frac{1}{n}$，＋∞）⊂ Ｓ ∩（x_m，＋∞），

这与１）、２）矛盾 从而

｜x_n-x_m｜$\leqslant\max\{\frac{1}{n},\frac{1}{m}\}$因此｛$x_n$｝满足Ｃａｕｃｈｙ收敛准则；

③ 由Ｃａｕｃｈｙ收敛准则得，$\zeta=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

④ 对 $\varepsilon > 0$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \frac{1}{n}) = \zeta$，所以存在$n_0$使得

x_{n_0}，$x_{n_0} - \dfrac{1}{n_0} \in (\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon)$，

从而

$S \cap (x_{n_0} - \dfrac{1}{n_0}, +\infty) \subset S \cap (\zeta - \varepsilon, +\infty)$，

由２）得$S \cap (\zeta - \varepsilon, +\infty)$是无限点集

又$S \cap (\zeta + \varepsilon, +\infty) \subset S \cap (x_{n_0}, +\infty)$，

由１）得$S \cap (\zeta + \varepsilon, +\infty)$至多是有限点集　因此

$S \cap (\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon)$，

是无限点集，即ζ是S 的聚点

到此，实数完备性基本定理的相互证明完毕

	单调有界定理	确界定理	区间套定理	有限覆盖定理	聚点定理	柯西收敛定理
单调有界定理		✓	✓	✓	✓	✓
确界定理	✓		✓	✓	✓	✓
区间套定理	✓	✓		✓	✓	✓
有限覆盖定理	✓	✓	✓		✓	✓
聚点定理	✓	✓	✓	✓		✓
柯西收敛定理	✓	✓	✓	✓	✓	