光学

Charles

2024 年 1 月 10 日

目录

1　几何光学

1.1　光的传播规律

1.1.1　几何光学三大基本定律

1. 光的直线传播定律：在各向同性均匀透明介质中，光沿直线传播。
2. 光的独立传播定律：自不同方向或由不同物体发出的光线在空间独立传播而互不影响。
3. 光的反射和折射定律：
   (1) 光的反射定律：三线共面，两线分居，$\theta_1' = \theta_1$
   (2) 光的折射定律：三线共面，两线分居，$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

1.1.2　全反射定律

1. 条件：光从光密介质射向光疏介质，入射角超过临界角。
2. 全反射临界角：
$$\sin\theta_c = \frac{n'}{n} \tag{1.1}$$
3. 光纤数值孔径：
$$\mathrm{N.A.} = n_a \sin\theta_0 \tag{1.2}$$

1.2　费马原理

1. **光程**：光行径的几何路径的长度 l 与光在该介质中的折射率 n 的乘积。
$$L(QP) = \int_Q^P n(l)\mathrm{d}l \tag{1.3}$$
2. **费马原理**：光传播的路径是光程取极值的路径。
   Remark. 平面镜光程为极小值，旋转椭球镜光程为常量。

1.3　几何光学成像规律

1.3.1　成像基本概念

1. 物方：物点组成的空间。
2. 像方：像点组成的空间。
3. 共轭点：物方和像方一一对应的点。
4. 等光程性：物点和像点之间各光线的光程都相等。
5. 实际透镜
   (1) 焦点、焦平面：无穷远物点的共轭。
   (2) 主点、主平面：横向放大率 $M = 1$。
   (3) 节点、节平面：角放大率 $\gamma = 1$。
6. 薄透镜
   (1) 光心：主平面与光轴的交点。
   (2) 光焦度 $\varPhi$：焦距的倒数，单位：屈光度 ($\mathrm{D/m^{-1}}$)。
7. 符号约定：
   (1) 物像：实正虚负
   (2) 物像：上正下负
   (3) 界面：凸正凹负
   (4) 距离：增正减负

1.3.2 面镜成像

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=-\frac{2}{R} \tag{1.4}$$

$$M=-\frac{v}{u} \tag{1.5}$$

1.3.3 透镜成像

$$\frac{n_1}{u}+\frac{n_2}{v}=\frac{n_2-n_1}{R}=\frac{n_{内}-n_{外}}{|R|}=\varPhi \tag{1.6}$$

$$M=-\frac{n_1 v}{n_2 u} \tag{1.7}$$

1. 物方焦距 f_1 和像方焦距 f_2：

$$f_1=\frac{n_1 R}{n_2-n_1},\ f_2=\frac{n_2 R}{n_2-n_1} \tag{1.8}$$

2. 折射面两个焦距关系：

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{n_1}{n_2} \tag{1.9}$$

3. **高斯公式**：式(1.6)可化为

$$\frac{f_1}{u}+\frac{f_2}{v}=1 \tag{1.10}$$

4. **拉格朗日-亥姆霍兹定理**：近轴成像时物高 y、孔径角 u 和介质折射率 n 的乘积为一常数：

$$ynu=y'n'u'=J \tag{1.11}$$

1.3.4 逐次成像

1. 采用物象公式：

$$\frac{n_1}{u_1}+\frac{n_2}{v_1}=\frac{n_2-n_1}{R_1},\ \frac{n_2}{u_2}+\frac{n_3}{v_2}=\frac{n_3-n_2}{R_2},\ \dots \tag{1.12}$$

$$M=M_1\cdot M_2\cdots \tag{1.13}$$

2. 采用拉赫不变量：

$$ynu=y'n'u'=\cdots \tag{1.14}$$

1.3.5 薄透镜及透镜组成像

$$\frac{n_1}{u}+\frac{n_2}{v}=\frac{n-n_1}{R_1}+\frac{n_2-n}{R_2} \tag{1.15}$$

$$M=-\frac{n_1 v}{n_2 u}=-\frac{fv}{f'u}=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'} \tag{1.16}$$

1. **磨镜者公式**：

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f'}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{1.17}$$

2. **牛顿公式**：

$$xx'=ff'=f^2 \tag{1.18}$$

3. **薄透镜组成像公式**:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2} \tag{1.19}$$

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2} \tag{1.20}$$

$$\varPhi=\varPhi_1+\varPhi_2 \tag{1.21}$$

1.3.6 光学系统放大率

1. 横向放大率:

$$M=-\frac{h'}{h}=-\frac{n_1 v}{n_2 u}=-\frac{fv}{f'u}=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'} \tag{1.22}$$

2. 轴向放大率:

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=-\frac{n_1 v^2}{n_2 u^2}=-\frac{fv^2}{f'u^2} \tag{1.23}$$

3. 角放大率:

$$\gamma=-\frac{\mu'}{\mu}=-\frac{u}{v} \tag{1.24}$$

4. 关系:

$$\alpha=-M^2\frac{n_2}{n_1},\quad \gamma M=\frac{n_1}{n_2},\quad M=-\alpha\gamma \tag{1.25}$$

1.4 光学仪器

1. 投影仪:

$$M=-\frac{v}{u}\approx-\frac{v}{f} \tag{1.26}$$

2. 照相机:

(1) 透镜的 $f-number$ 是衡量“聚光能力”的物理量:

$$f-number=\frac{f}{D} \tag{1.27}$$

(2) $f-number$ 越大,曝光时间越短。

$$I\propto\frac{D^2}{f^2}\propto\frac{1}{(f-number)^2} \tag{1.28}$$

3. 眼睛:

(1) 眼睛的调节范围:

$$A=\frac{1}{S_{FO}}-\frac{1}{S_{NO}} \tag{1.29}$$

Eg 1 一远点为 2 m 的近视眼,求近视镜的度数。

Solution.

$$\varPhi=\frac{1}{f}=\frac{1}{\infty}+\frac{1}{-2}=-0.5D$$

Eg 2 一近点为 125 m 的近视眼,求远视镜的度数。

Solution.

$$\varPhi=\frac{1}{f}=\frac{1}{-1.25}+\frac{1}{0.25}=3.2D$$

4. 放大镜：
 (1) 当虚像在眼睛的近点时，放大镜角放大率最大：

$$m=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{25cm}{u}=1+\frac{25cm}{f} \tag{1.30}$$

 (2) 当物体在透镜焦点、虚像在无穷远时，放大镜角放大率最小：

$$m=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{25cm}{f} \tag{1.31}$$

5. 目镜：
 (1) 当虚像在眼睛的近点时，目镜角放大率最大：

$$m=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{25cm}{u}=1+\frac{25cm}{f} \tag{1.32}$$

 (2) 当物体在透镜焦点、虚像在无穷远时，目镜标称角放大率：

$$m_0=\frac{25cm}{f} \tag{1.33}$$

6. 显微镜：
 (1) 物体在物镜焦点靠外，物镜成放大实像在目镜焦点靠里，目镜成放大虚像。
 (2) 显微镜角放大率：

$$m=\frac{\omega'}{\omega}=-\frac{25cm\Delta}{f_o f_e} \tag{1.34}$$

7. 望远镜：
 (1) 物镜的像方焦点和目镜的物方焦点几乎重合。
 (2) 观看无限远的物体时，光学距离为 0；观看有限远的物体时，光学距离为一个不为零的小数。
 (3) 望远镜角放大率：

$$m=-\frac{f_o}{f_e} \tag{1.35}$$

8. 棱镜光谱仪
 (1) 偏向角：

$$\delta=\theta_1+\theta_1'-\alpha \tag{1.36}$$

 产生最小偏向角 δ_m 的充要条件：

$$\theta_1=\theta_1'=\frac{\alpha+\delta_m}{2},\quad \theta_2=\theta_2'=\frac{\alpha}{2} \tag{1.37}$$

 实验上可以用最小偏向角 δ_m 来测定棱镜对某色光的折射率：

$$n=\sin\frac{\alpha+\delta_m}{2}\bigg/\sin\frac{\alpha}{2} \tag{1.38}$$

 (2) 角色散本领：

$$D_\theta=\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}\delta_m}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-n^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \tag{1.39}$$

 (3) 线色散本领：

$$D_l=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}l'}{\sin\varepsilon\mathrm{d}\lambda}=\frac{f_2\mathrm{d}\delta}{\sin\varepsilon\mathrm{d}\lambda}=\frac{f_2}{\sin\varepsilon}\frac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-n^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \tag{1.40}$$

 (4) 色分辨本领：

$$R=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=b\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \tag{1.41}$$

1.5 光度学

1. 辐射能通量 (W)：

$$\varPhi = \int_0^\infty \varPsi(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{1.42}$$

2. 光通量 (lm)：

$$\varPhi = \int_0^\infty V(\lambda)\varPsi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\ (\mathrm{W}) = K_M \int V(\lambda)\varPsi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\ (\mathrm{lm}) \tag{1.43}$$

3. 发光强度 (cd)：

$$I = \frac{\mathrm{d}\varPhi}{\mathrm{d}\varOmega} \tag{1.44}$$

4. 亮度 (cd/m^2)：

$$B = \frac{\mathrm{d}\varPhi}{\cos\theta \mathrm{d}S\mathrm{d}\varOmega} = \frac{I}{\cos\theta\mathrm{d}S} \tag{1.45}$$

5. 照度 (lx)：

$$E = \frac{\mathrm{d}\varPhi}{\mathrm{d}S} \tag{1.46}$$

2 干涉

2.1 波的干涉与叠加

2.1.1 波的描述

1. 定态标量波函数：

$$U(P,t) = A(P)\cos\omega t - \varphi(P) \tag{2.1}$$

2. 复振幅：

$$\widetilde{U}(P,t) = A(P)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \varphi(P))} = A(P)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(P)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{2.2}$$

(1) 平面波复振幅：

$$\widetilde{U}(P,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)} \tag{2.3}$$

(2) 球面波复振幅：

$$\widetilde{U}(P,t) = \frac{a}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr+\varphi_0)} \tag{2.4}$$

(3) 柱面波复振幅：

$$\widetilde{U}(P,t) = \frac{b}{\sqrt{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr+\varphi_0)} \tag{2.5}$$

3. 光强与复振幅的关系：

$$I(P) = \widetilde{U}(P)\widetilde{U}^*(P) = A^2(P) \tag{2.6}$$

2.1.2 双光束干涉

1. 相干条件：
   (1) 必要条件：
      a. 有同向平行振动分量。
      b. 频率相同。
      c. 有稳定的相位差。
   (2) 充分条件：
      a. 振幅相差不大。
      b. 光程差不能太大。

2. 双光束干涉强度公式：

$$\begin{aligned} I(P) &= (\widetilde{U}_1 + \widetilde{U}_2)(\widetilde{U}_1 + \widetilde{U}_2)^* &(2.7)\\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta(P) &(2.8)\\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta(P) &(2.9)\\ &= I_0(1+\gamma\cos\delta(P)) &(2.10)\end{aligned}$$

3. 干涉场的衬比度：

$$\gamma = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \tag{2.11}$$

4. 双光束干涉场的衬比度：

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} &(2.12)\\ &= \frac{1}{2}(1+\cos\alpha) &(2.13)\end{aligned}$$

2.2 分波前：杨氏双缝干涉

2.2.1 杨氏双缝干涉

1. 光程差：

$$\delta = d\sin\theta = \begin{cases} 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{明纹} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases} \tag{2.14}$$

2. 条纹间距：

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{d} \tag{2.15}$$

3. 光强分布：

$$I(x,y) = I_0\cos^2\frac{\pi d}{\lambda D}x = I_0\cos^2\frac{kd}{2D}x = I_0(1+\cos\frac{kd}{D}x) \tag{2.16}$$

2.2.2 其他分波前干涉

1. 洛埃镜：

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{d} = \frac{\lambda D}{2a} \tag{2.17}$$

2. 菲涅尔双面镜：

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{d} = \frac{\lambda(B+C))}{2\alpha B} \tag{2.18}$$

3. 菲涅尔双棱镜：

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{d} = \frac{\lambda(B+C)}{2(n-1)\alpha B} \tag{2.19}$$

2.2.3 两束平行光的干涉场

1. 条纹间距：

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin\theta_1 + \sin\theta_2} \tag{2.20}$$

2. 空间频率：

$$f = \frac{1}{\Delta x} = \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}{\lambda} \tag{2.21}$$

3. 光强分布：

$$I(x,y) = I_0(1+\gamma\cos(2\pi f x + \varphi_0)) \tag{2.22}$$

2.2.4 干涉条纹的变动

1. 点源位移导致条纹移动：

$$\delta x = \frac{D}{R} x_0 \tag{2.23}$$

$$N = \frac{\delta x}{\Delta x} = \frac{d}{R\lambda} x_0 \tag{2.24}$$

2. 光源宽度对干涉场衬比度的影响：

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{\Delta x} \delta x = 2\pi \frac{d}{R\lambda} x_0 = 2\pi f_0 x_0, \quad f_0 = \frac{d}{R\lambda} \tag{2.25}$$

(1) 两分离点源部分相干：

$$I(x,y) = I_Q + I_A = 2I_0(1 + \cos\frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos(2\pi f x + \frac{\varphi_0}{2})) \tag{2.26}$$

$$\gamma = \left|\cos\frac{\varphi_0}{2}\right| \leqslant 1 \tag{2.27}$$

(2) 线光源部分相干：

$$\begin{aligned} I(x,y) &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} B(1 + \cos(2\pi f x + 2\pi f_0 x_0)) \mathrm{d}x_0 \\ &= Bb\left(1 + \frac{\sin\pi f_0 b}{\pi f_0 b} \cos 2\pi f x\right) \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\gamma = \left|\frac{\sin\pi f_0 b}{\pi f_0 b}\right| = \left|\frac{\sin u}{u}\right| \tag{2.29}$$

(3) 面光源部分相干：

$$I(x,y) = \iint_{\Sigma} B(1 + \cos(2\pi f x + 2\pi f_0 x_0)) \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0 \tag{2.30}$$

a. 方孔光源：

$$I(x,y) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}y_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} B(1 + \cos(2\pi f x + 2\pi f_0 x_0)) \mathrm{d}x_0 \tag{2.31}$$

$$= B(ab)\left(1 + \frac{\sin\pi f_0 b}{\pi f_0 b} \cos 2\pi f x\right) \tag{2.32}$$

$$\gamma = \left|\frac{\sin\pi f_0 b}{\pi f_0 b}\right| = \left|\frac{\sin u}{u}\right| \tag{2.33}$$

b. 环状光源：

$$I(x,y) = B(2\pi\rho\Delta\rho)\left(1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f x + 2\pi f_0 \rho\cos\theta) \mathrm{d}\theta\right) \tag{2.34}$$

c. 圆盘光源：

$$I(x,y) = \int_{-\rho}^{\rho} Bb\sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{\rho}\right)} (1 + \cos(2\pi f x + 2\pi f_0 x_0)) \mathrm{d}x_0 \tag{2.35}$$

(4) 光源极限宽度公式：

$$b_0 = K\frac{R\lambda}{d} \tag{2.36}$$

- 线光源：$K = 1.0$
- 环状光源：$K = 0.78$
- 圆盘光源：$K = 1.2$

3. 非单色性对干涉场衬比度的影响：

$$\gamma(\Delta) = \left|\cos\left(\frac{\Delta k}{2}\Delta\right)\right| \tag{2.37}$$

2.2.5 光场的空间相干性

1. 相干间隔：

$$d_0 = \frac{R}{b}\lambda \tag{2.38}$$

2. 相干孔径角：

$$b \cdot \Delta\theta_0 = \lambda \tag{2.39}$$

3. 衬比度函数的另一形式：

$$\gamma\left(\Delta\theta\right) = \left|\frac{\sin \pi \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_0}}{\pi \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_0}}\right| \tag{2.40}$$

2.3 分振幅：薄膜干涉

2.3.1 等厚干涉

1. 光程差：

$$\Delta L = 2nd\cos i + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{明纹} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases} \tag{2.41}$$

2. 厚度间距：

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2n} \tag{2.42}$$

3. 劈尖：
   (1) 厚度间距：

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2} \tag{2.43}$$

   (2) 条纹间距：

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha} \tag{2.44}$$

4. 牛顿环：
   (1) 光程差：

$$\Delta L = 2d + \frac{\lambda}{2} = 2\frac{r^2}{2R} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{明纹} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases} \tag{2.45}$$

   (2) 条纹半径：

$$r_{k+m}^2 - r_k^2 = mR\lambda \tag{2.46}$$

5. 增透膜与增反膜：

$$nh = \frac{\lambda}{4} \tag{2.47}$$

   (1) 增透膜：$n_1 < n < n_2$
   (2) 增反膜：$n_1 < n > n_2$

2.3.2 等倾干涉

1. 光程差：

$$\Delta L = 2nd\cos i + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{明纹} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases} \tag{2.48}$$

2. 角度间距：

$$\Delta i = i_{k+1} - i_k = -\frac{\lambda}{2nd\sin i_k} \tag{2.49}$$

2.3.3 光场的时间相干性

1. 相干长度：

$$L_0 \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \lambda \tag{2.50}$$

2. 相干时间：

$$\tau_0 \cdot \Delta\nu = 1 \tag{2.51}$$

3. 衬比度函数的另一形式：

$$\gamma(\Delta L) = \left| \frac{\sin \pi \frac{\Delta L}{\Delta L_0}}{\pi \frac{\Delta L}{\Delta L_0}} \right| \tag{2.52}$$

2.4 迈克尔孙干涉仪

1. 迈克尔孙-莫雷实验：

$$\Delta L = 2l \left(\frac{v}{c}\right)^2 \tag{2.53}$$

2. 钠黄光双线波长差：

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\Delta d} \tag{2.54}$$

3. 精密测长：

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2}\Delta N \tag{2.55}$$

2.5 多光束干涉：FP 干涉仪

1. 相邻光束的相位差：

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh\cos\theta \tag{2.56}$$

2. 透射干涉场：

$$\widetilde{U}_T(\delta) = Att'(1 + r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} + r^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\delta)} + \cdots) = \frac{tt'}{1 - r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}A = \frac{1-R}{1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}A \tag{2.57}$$

3. 透射光强：

$$I_T(\delta) = \widetilde{U}_T\widetilde{U}_T^* = \frac{I_0}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\dfrac{\delta}{2}} \tag{2.58}$$

4. 反射光强：

$$I_R(\delta) = I_0 - I_T = \frac{I_0}{1 + \dfrac{(1-R)^2}{4R\sin^2\delta/2}} \tag{2.59}$$

5. 强度峰的半值宽度：

(1) 半值相位宽度：

$$\varepsilon = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}\mathrm{rad} \tag{2.60}$$

(2) 半值角宽度：

$$\Delta\theta_k = \frac{\lambda}{2\pi nh\sin\theta_k} \cdot \frac{1-R}{\sqrt{R}}\mathrm{rad} \tag{2.61}$$

(3) 半值谱线宽度：

$$\Delta\lambda_k = \frac{\lambda_k^2}{2\pi nh} \cdot \frac{1-R}{\sqrt{R}}\mathrm{nm} \tag{2.62}$$

6. 色分辨本领：

$$R_c = \frac{\lambda}{\delta\lambda_m} = \pi k\frac{\sqrt{R}}{1-R} \tag{2.63}$$

7. 自由光谱范围：

$$\Delta\lambda = \lambda_M - \lambda_m = \frac{\overline{\lambda}}{k} = \frac{\overline{\lambda}^2}{2nh} \tag{2.64}$$

3 衍射

3.1 惠更斯-菲涅尔原理

1. 菲涅尔-基尔霍夫衍射积分公式：

$$\widetilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\oiint_{\Sigma_0}\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta)\widetilde{U}_0(Q)\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S \tag{3.1}$$

2. 傍轴衍射积分公式：

$$\widetilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda r_0}\iint_{\Sigma_0}\widetilde{U}_0(Q)\mathrm{e}^{ikr}\mathrm{d}S \tag{3.2}$$

3. 衍射巴比涅原理：

$$\widetilde{U}_a(P)+\widetilde{U}_b(P)=\widetilde{U}_0(P) \tag{3.3}$$

3.2 菲涅尔衍射

3.2.1 半波带法

1. 相位关系：

$$\widetilde{U}(P)=A_1-A_2+\cdots+(-1)^{k+1}A_k+\cdots=\frac{1}{2}[A_1+(-1)^{k+1}A_k] \tag{3.4}$$

2. 振幅关系：

$$A_k\propto f(\theta_k)\cdot\frac{\Delta\Sigma_k}{r_k}=\frac{1}{2}(1+\cos\theta_k)\cdot\frac{\pi R\lambda}{R+b} \tag{3.5}$$

3. 半波带半径：

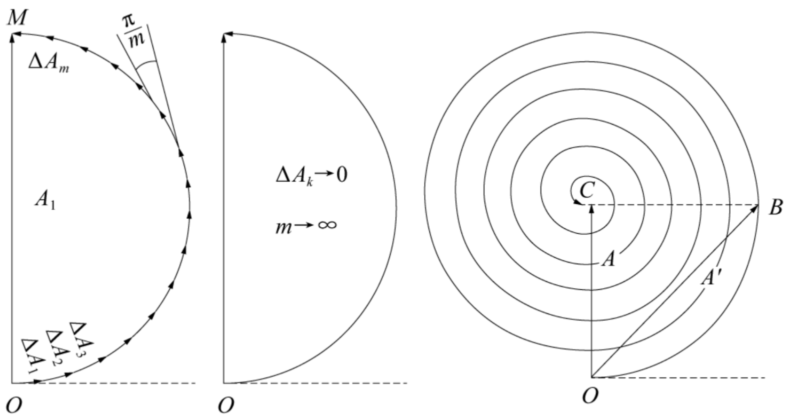
$$\rho_k=\sqrt{k\frac{Rb\lambda}{R+b}}=\sqrt{k}\rho_1 \tag{3.6}$$

4. 圆孔衍射轴上光强：

$$I(b,\rho,r,\lambda)=\frac{a^2}{(R+b)^2}4\sin^2\left(\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{b}\right)\frac{\rho^2}{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.7}$$

5. 中心振幅：
   (1) 自由光场：$A_0=\frac{1}{2}A_1$
   (2) 圆孔衍射：
      a. 包含奇数个半波带：$\widetilde{U}(P)=2A_0$，中心为亮斑
      b. 包含偶数个半波带：$\widetilde{U}(P)=0$，中心为暗斑
   (3) 圆屏衍射：$\widetilde{U}(P)=\frac{1}{2}A_{m+1}$，中心为亮斑

3.2.2 矢量图解法



a　　b　　c

3.2.3 波带片

1. 波带片成像公式：由式(3.6)可得

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=k\frac{\lambda}{\rho_k^2} \tag{3.8}$$

2. 焦距：

$$f_1=\frac{\rho_1^2}{\lambda} \tag{3.9}$$

3.3 夫琅禾费衍射

3.3.1 单缝夫琅和费衍射

1. 衍射积分：
   (1) 相位因子：

$$kr\to k_0L=k_0(L-L_0)+k_0L_0=-k_0x_0\sin\theta+k_0L_0 \tag{3.10}$$

   (2) 衍射场：

$$\widetilde{U}(\theta)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}Ab\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0L_0}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin\theta\cdot x_0}\mathrm{d}x_0=\widetilde{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{3.11}$$

$$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} \tag{3.12}$$

$$\widetilde{c}=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)A \tag{3.13}$$

2. 衍射强度：

$$I(\theta)=\widetilde{U}\widetilde{U}^*=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \tag{3.14}$$

$$I_0=\widetilde{c}\widetilde{c}^*=\frac{(ab)^2}{(\lambda f)^2}A^2 \tag{3.15}$$

3. 衍射图样的主要特征：
   (1) 中央零级主极大：$I(0)=I_0$
   (2) 暗纹位置：

$$a\sin\theta=k\lambda \tag{3.16}$$

   (3) 次级大：

x	$\pm1.43\pi$	$\pm2.46\pi$	$\pm3.47\pi$
$\sin\theta$	$\pm1.43\frac{\lambda}{a}$	$\pm2.46\frac{\lambda}{a}$	$\pm3.47\frac{\lambda}{a}$
$I(\theta)/I_0$	4.7%	1.7%	0.8%

   (4) 半角宽度：

$$\Delta\theta_0=\frac{\lambda}{a} \tag{3.17}$$

   (5) 半宽度：

$$\Delta l=f\Delta\theta_0=f\frac{\lambda}{a} \tag{3.18}$$

3.3.2 矩孔夫琅禾费衍射

1. 衍射积分：

(1) 方向余弦：

$$\cos\alpha_1 \approx \frac{x}{f} \approx \frac{x}{\sqrt{x^2+f^2}} = \sin\theta_1, \quad \cos\alpha_2 \approx \frac{y}{f} \approx \frac{y}{\sqrt{y^2+f^2}} = \sin\theta_2 \tag{3.19}$$

(2) 相位因子：

$$kr \to k_0 L = k_0(L-L_0) + K_0 L_0 = -k\Delta r + k_0 L_0 \tag{3.20}$$

$$\Delta r = \overrightarrow{OQ} \cdot \boldsymbol{l}_0 = x_0\cos\alpha_1 + y_0\cos\alpha_2 = x_0\sin\theta_1 + y_0\sin\theta_2 \tag{3.21}$$

(3) 衍射场：

$$\widetilde{U}(\theta,\theta_2) = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda f} Ab \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 L_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\sin x_0\theta_1 + y_0\sin\theta_2)} \mathrm{d}x_0 = \widetilde{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 L_0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right) \tag{3.22}$$

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta_1}{\lambda}, \quad \beta = \frac{\pi b\sin\theta_2}{\lambda} \tag{3.23}$$

$$\widetilde{c} = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)A \tag{3.24}$$

2. 衍射强度：

$$I(\theta_1,\theta_2) = \widetilde{U}\widetilde{U}^* = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \tag{3.25}$$

$$I_0 = \widetilde{c}\widetilde{c}^* = \frac{(ab)^2}{(\lambda f)^2}A^2 \tag{3.26}$$

3. 衍射图样的主要特征：

(1) 中央零级主极大：$I(0,0) = I_0$

(2) 暗纹位置：

$$\begin{cases} a\sin\theta_1 = k_1\lambda, & k_1 = \pm1,\ \pm2,\dots \\ a\sin\theta_2 = k_2\lambda, & k_2 = \pm1,\ \pm2,\dots \end{cases} \tag{3.27}$$

(3) 半角宽度：

$$\Delta\theta_1 = \frac{\lambda}{a}, \quad \Delta\theta_2 = \frac{\lambda}{b} \tag{3.28}$$

3.3.3 圆孔夫琅禾费衍射

1. 衍射积分：

$$\widetilde{U}(\theta) = \widetilde{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 L_0} \cdot 2\frac{\mathrm{J}_1(x)}{x} \tag{3.29}$$

$$x = \frac{2\pi a\sin\theta}{\lambda} \tag{3.30}$$

$$\widetilde{c} = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(\pi a^2)A \tag{3.31}$$

2. 衍射强度：

$$I(\theta) = \widetilde{U}\widetilde{U}^* = I_0\left(\frac{2\mathrm{J}_1(x)}{x}\right)^2 \tag{3.32}$$

$$I_0 = \widetilde{c}\widetilde{c}^* = \frac{(\pi a^2)^2}{(\lambda f)^2}A^2 \tag{3.33}$$

3. 艾里斑的半角宽度：

$$\Delta\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{3.34}$$

4. 瑞利判据：

$$\delta\theta_m = \Delta\theta_0 \tag{3.35}$$

3.3.4 成像仪器分辨本领

1. 眼睛：
   (1) 最小分辨角：

$$\delta\theta_e = 1.22\frac{\lambda}{D_e} \approx 1.22\frac{550\mathrm{nm}}{2\mathrm{mm}} \approx 3.3\times10^{-4}\mathrm{rad} \approx 1' \tag{3.36}$$

2. 望远镜：
   (1) 最小分辨角：

$$\delta\theta_m \approx 1.22\frac{\lambda}{D_o} \tag{3.37}$$

   (2) 有效放大率：

$$M_{\text{eff}} = \frac{\delta\theta_e}{\delta\theta_m} = \frac{D_o}{D_e} \tag{3.38}$$

3. 显微镜：
   (1) 最小分辨线度：

$$\delta y_m = 0.61\frac{\lambda_0}{n_0\sin u_0} = 0.61\frac{\lambda_0}{\mathrm{N.A.}} \tag{3.39}$$

   (2) 物镜的数值孔径：

$$\mathrm{N.A.} = n_0\sin u_0 \tag{3.40}$$

   (3) 有效放大率：

$$M_{\text{eff}} = \frac{\delta y_e}{\delta y_m} \tag{3.41}$$

4. 像记录介质：
   (1) 空间分辨率：

$$N \geqslant \frac{1}{\delta y_m'} = \frac{1}{1.22f}\frac{D}{\lambda} \tag{3.42}$$

3.4 多维结构夫琅禾费衍射

3.4.1 有序结构

1. **位移-相移定理**：

$$\widetilde{U}'(\theta_1,\theta_2) = \widetilde{U}(\theta_1,\theta_2)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_1+\delta_2)} \tag{3.43}$$

$$\delta_1 = -kx_0\sin\theta_1, \quad \delta_2 = -ky_0\sin\theta_2 \tag{3.44}$$

2. 有序结构的夫琅禾费衍射场：

$$\widetilde{U}(\theta_1,\theta_2) = \widetilde{u}_0(\theta_1,\theta_2)\cdot\widetilde{S}(\theta_1,\theta_2) = \widetilde{u}_0(\theta_1,\theta_2)\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_{1j}+\delta_{2j})} \tag{3.45}$$

3.4.2 一维光栅衍射

1. 结构因子：

$$\widetilde{S}(\theta) = 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\delta)}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)\delta} = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\delta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)\beta}\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right), \quad \beta = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} \tag{3.46}$$

2. 衍射场：

$$\widetilde{U}(\theta) = \widetilde{u}_0(\theta)\cdot\widetilde{S}(\theta) = \widetilde{c}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)\beta} \tag{3.47}$$

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}, \quad \beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} \tag{3.48}$$

3. 衍射强度：

$$I(\theta) = |\widetilde{u}_0|^2\cdot|\widetilde{S}|^2 = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 \tag{3.49}$$

4. 衍射图样的主要特征：
   (1) 主极大方位角：

$$\beta = k\pi \Rightarrow d\sin\theta_k = k\lambda \tag{3.50}$$

$$I(\theta_k) = N^2 \cdot i(\theta_k) \tag{3.51}$$

   (2) 主极大半角宽度：

$$\Delta\theta_k = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k} = \frac{\lambda}{D\cos\theta_k} \tag{3.52}$$

   (3) 主极大之间：$(N-1)$ 个主极小，$(N-2)$ 个次极大
   (4) 单元因子的作用：缺级

$$\begin{aligned} d\sin\theta_k &= k\lambda \\ a\sin\theta_k' &= k'\lambda \end{aligned}, \quad \theta_k = \theta_k' \Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{k}{k'} \tag{3.53}$$

5. 光栅光谱仪：
   (1) 角色散本领：

$$D_\theta = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{k}{d\cos\theta_k} \tag{3.54}$$

   (2) 线色散本领：

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta\theta} = fD_\theta = \frac{fk}{d\cos\theta_k} \tag{3.55}$$

   (3) 色分辨本领：

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_m} = kN \tag{3.56}$$

6. 闪耀光栅：
   (1) 两种照明方式：
      a. 入射光束垂直光栅宏观表面：

$$\Delta L = d\sin 2\theta_b = \lambda_{1b} = 2\lambda_{2b} \tag{3.57}$$

      b. 入射光束垂直单元槽面：

$$\Delta L = 2d\sin\theta_b = \lambda_{1b}' = 2\lambda_{2b}' \tag{3.58}$$

   (2) 衍射强度：

$$I(\theta) = i_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 \tag{3.59}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda}a(\sin(\theta-\theta_b) - \sin\theta_b) \approx (k-1)\pi, \quad \beta = \frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta \tag{3.60}$$

   (3) 仅有一序光谱：$a \approx d \Rightarrow \alpha \approx (k-1)\pi \Rightarrow k \neq 1$时，$\sin\alpha/\alpha = 0 \Rightarrow$ 缺级

3.4.3 二维周期结构衍射

1. 线内点间干涉：

$$\widetilde{S}_x(\theta_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(N_1-1)\beta_1}\left(\frac{\sin N_1\beta_1}{\sin\beta_1}\right), \quad \beta_1 = \frac{\pi d_1\sin\theta_1}{\lambda} \tag{3.61}$$

2. 面内线间干涉：

$$\widetilde{S}_y(\theta_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(N_2-1)\beta_2}\left(\frac{\sin N_2\beta_2}{\sin\beta_2}\right), \quad \beta_2 = \frac{\pi d_2\sin\theta_2}{\lambda} \tag{3.62}$$

3. 结构因子：

$$\widetilde{S}(\theta_1,\theta_2) = \widetilde{S}_x(\theta_1)\cdot\widetilde{S}_y(\theta_2) \tag{3.63}$$

4. 衍射强度：

$$I(\theta_1,\theta_2) = |\widetilde{u}_0(\theta_1,\theta_2)|^2\cdot\left(\frac{\sin N_1\beta_1}{\sin\beta_1}\right)^2\left(\frac{\sin N_2\beta_2}{\sin\beta_2}\right)^2 \tag{3.64}$$

5. 衍射图样的主要特征：

(1) 主极大方位角：

$$d_1 \sin\theta_1 = k_1\lambda, \quad d_2 \sin\theta_2 = k_2\lambda \tag{3.65}$$

(2) 主极大半角宽度：

$$\Delta\theta_1 = \frac{\lambda}{N_1 d_1 \cos\theta_1}, \quad \Delta\theta_2 = \frac{\lambda}{N_2 d_2 \cos\theta_2} \tag{3.66}$$

3.4.4 三维周期结构衍射

1. 线内点间干涉的零级衍射方向：与波前正交的方向
2. 面内线间干涉的零级衍射方向：反射定理
3. 体内面间干涉的非零级衍射方向：布拉格条件

$$2d\sin\theta = k\lambda \tag{3.67}$$

4 偏振

4.1 偏振光引论

1. 光的宏观偏振态：

(1) 自然光：轴对称性

(2) 部分偏振光：无轴对称性

(3) 线偏振光：

$$E_x(t) = A_x\cos\omega t, \quad E_y(t) = A_y\cos(\omega t + \delta) \tag{4.1}$$

(4) 圆偏振光：

$$E_x(t) = A\cos\omega t, \quad E_y(t) = A\cos(\omega \pm \frac{\pi}{2}) \tag{4.2}$$

(5) 椭圆偏振光：

$$E_x(t) = A_x\cos\omega t, \quad E_y(t) = A_y\cos(\omega t + \delta) \tag{4.3}$$

$$\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - 2\frac{E_xE_y}{A_xA_y}\cos\delta = \sin^2\delta \tag{4.4}$$

2. 马吕斯定律：

$$I_P(\alpha) = I_0\cos^2\alpha \tag{4.5}$$

3. 偏振光通过偏振片：

(1) 自然光通过偏振片：

$$I_P(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\cdot I_0 = \frac{1}{2}I_0 \tag{4.6}$$

(2) 部分偏振光通过偏振片：可看作自然光与线偏振光的混合

$$I_P(\alpha) = I_m\cos^2\alpha + I_M\sin^2\alpha = I_m + (I_M - I_m)\sin^2\alpha$$

$$I_P(\beta) = I_m + (I_M - I_m)\cos^2\beta \tag{4.7}$$

(3) 椭圆偏振光通过偏振片：偏振光干涉

$$I_P(\alpha) = (A_x\cos\alpha)^2 + (A_y\sin\alpha)^2 + 2A_x\cos\alpha\cdot A_y\sin\alpha\cdot\cos\delta$$

$$I_P(\alpha) = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_xI_y\cos^2\delta}\cdot\cos(2\alpha - \theta_0) \tag{4.8}$$

$$\theta_0 = \arctan\frac{2\sqrt{I_xI_y}\cos\delta}{I_x - I_y} \tag{4.9}$$

a. 正椭圆偏振光：$\delta=\pm\frac{\pi}{2}$

$$I_P(\alpha)=I_x+(I_y-I_x)\sin^2\alpha \tag{4.10}$$

b. 圆偏振光：$\delta=\pm\frac{\pi}{2}$，$I_x=I_y$

$$I_P(\alpha)=\frac{1}{2}(I_x+I_y)=\frac{1}{2}I_0 \tag{4.11}$$

4. 偏振度：

$$p=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m} \tag{4.12}$$

- $p=1$：线偏振光
- $0<p<1$：部分偏振光、椭圆偏振光
- $p=0$：自然光、圆偏振光

4.2 双折射

1. 单轴晶体的两个主折射率：

$$n_o=\frac{c}{v_o},\quad n_e=\frac{c}{v_e} \tag{4.13}$$

2. 两个重要情形（晶片厚度均匀）：

(1) 光轴平行表面、光束正入射：$\boldsymbol{r}_o\perp\boldsymbol{N}_o$，$\boldsymbol{r}_e\perp\boldsymbol{N}_e$，出射光有一相位差：

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda_o}(n_e-n_o)d \tag{4.14}$$

(2) 光轴任意取向、光束正入射：$\boldsymbol{r}_o\perp\boldsymbol{N}_o$，$\boldsymbol{r}_e$ 与 $\boldsymbol{N}_e$ 分离。

4.3 晶体光学器件

1. 尼科尔棱镜：$n_e=1.4864,\quad n_o=1.6584,\quad n_B=1.55$

(1) e 光沿直线透射

(2) o 光全反射，$\theta_o=\arcsin\frac{n_B}{n_o}=69^{\circ}$

2. 洛匈棱镜：

(1) o 光沿直线透射

(2) e 光向棱镜顶角方向偏折，$n_o\sin\theta=n_e\sin\theta_e$

3. 沃拉斯顿棱镜：

(1) $\updownarrow$ 振动：$e\to o$，$n_e\to n_o$，光疏 $\to$ 光密

$\cdot$ 振动：$o\to e$，$n_o\to n_e$，光密 $\to$ 光疏

(2) 角剪切量：

$$\Delta\theta=2\Delta n\tan\alpha \tag{4.15}$$

(3) 光程差：

$$\Delta L=2\Delta ny\tan\alpha=y\Delta\theta \tag{4.16}$$

4. 萨瓦偏光镜：

(1) 横向剪切量：

$$d=\sqrt{2}t\left(\frac{n_o^2-n_e^2}{n_o^2+n_e^2}\right) \tag{4.17}$$

(2) 光程差：

$$\Delta L=t\left[\frac{n_o^2-n_e^2}{n_o^2+n_e^2}(\cos\omega+\sin\omega)\sin\theta\right] \tag{4.18}$$

5. $\frac{\lambda}{4}$ 波片：

(1) 相位差：

$$\delta = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2} \tag{4.19}$$

(2) 厚度：

$$d = (2k+1)\frac{\lambda}{4\Delta n} \geqslant \frac{\lambda}{4\Delta n} \tag{4.20}$$

6. $\frac{\lambda}{2}$ 波片：

(1) 相位差：

$$\delta = \pm(2k+1)\pi \tag{4.21}$$

(2) 厚度：

$$d = (2k+1)\frac{\lambda}{2\Delta n} \geqslant \frac{\lambda}{2\Delta n} \tag{4.22}$$

4.4 圆偏振光、椭圆偏振光的获得和检验

1. 圆偏振光、椭圆偏振光的获得：
   (1) 圆偏振光：入射线偏振光偏振方向与 $\frac{\lambda}{4}$ 片光轴的夹角为 $\frac{\pi}{4}$。
   (2) 线偏振光：入射线偏振光偏振方向平行或垂直任意波片光轴。
   (3) 椭圆偏振光：入射线偏振光偏振方向与 $\frac{\lambda}{4}$ 片光轴的夹角非 $0, \pi, \frac{\pi}{4}$。
2. 各种偏振光通过 $\frac{\lambda}{4}$ 片后偏振态的变化：

入射光	$\frac{\lambda}{4}$ 片光轴位置	出射光
线偏振光	与偏振方向一致	线偏振光
	与偏振方向夹角 $\frac{\pi}{4}$	圆偏振光
	其他	椭圆偏振光
圆偏振光	任意	线偏振光
椭圆偏振光	与椭圆主轴一致	线偏振光
	其他	椭圆偏振光
自然光	任意	自然光
部分偏振光	任意	部分偏振光

3. 各种偏振光的检验：
   (1) 区分线偏振光：转动偏振片出现完全消光。
   (2) 区分圆偏振光和自然光：先过 $\frac{\lambda}{4}$ 片，再转动偏振片，圆偏振光出现完全消光，自然光透射光强不变。
   (3) 区分椭圆偏振光和部分偏振光：先过 $\frac{\lambda}{4}$ 片，再转动偏振片，椭圆偏振光出现完全消光，部分偏振光透射光强变化但不消光。

4.5 偏振光干涉

1. 振幅分量：

$$A_{2e} = A_{1e}\cos\beta = A_1\cos\alpha\cos\beta, \quad A_{2o} = A_{1o}\sin\beta = A_2\sin\alpha\sin\beta \tag{4.23}$$

2. 输出光强：

$$I_2 = A_{2e}^2 + A_{2o}^2 + 2A_{2e}A_{2o}\cos\delta = I_1(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\cos\delta) \tag{4.24}$$

3. 相位差：

$$\delta = \delta_{in} + \delta_{oe} + \delta' = \begin{cases} 2k\pi & \text{明纹} \\ (2k+1)\pi & \text{暗纹} \end{cases} \tag{4.25}$$

(1) δ_{in}：波片入射面偏振光分解产生的相位差。对于线偏振光：

$$\delta_{in}=\begin{cases}0 & \text{振动为一三象限}\\ \pi & \text{振动为二四象限}\end{cases} \tag{4.26}$$

(2) δ_{oe}：波片体内产生的相位差。

(3) δ'：P_2 偏振方向投影产生的相位差。

$$\delta'=\begin{cases}0 & \text{投影分量方向一致}\\ \pi & \text{投影分量方向相反}\end{cases} \tag{4.27}$$

4. 条纹间距：

$$\Delta x=\frac{\lambda}{\alpha\Delta n} \tag{4.28}$$

5. 显色偏振：白光入射，从 $\mathrm{P}_2\perp\mathrm{P}_1$ 转到 $\mathrm{P}_2//\mathrm{P}_1$，输出互补色调，交替显现。

4.6 旋光性

1. 旋转角：

(1) 旋光晶体：

$$\psi=\alpha d,\quad \alpha(^{\circ}/\mathrm{mm}) \tag{4.29}$$

(2) 旋光溶液：

$$\psi=[\alpha]Nd,\quad [\alpha](^{\circ}/(\mathrm{dm}\cdot\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3})) \tag{4.30}$$

2. 旋光色散：

$$\alpha=A+\frac{B}{\lambda^2} \tag{4.31}$$

3. 法拉第效应：磁致旋光

$$\psi=VBl \tag{4.32}$$

4.7 偏振的矩阵表示

1. 琼斯矢量：偏振态的矩阵表示

$$\mathscr{P}=\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\end{pmatrix} \tag{4.33}$$

2. 琼斯矩阵：偏振器的矩阵表示

(1) 线偏振器：

$$\boldsymbol{J}_x=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}_y=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}_{45^{\circ}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}_{-45^{\circ}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} \tag{4.34}$$

(2) $\frac{\lambda}{4}$ 波片：

$$\boldsymbol{J}_{qx}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}_{qy}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\mathrm{i}\end{pmatrix} \tag{4.35}$$

(3) 圆偏振器：

$$\boldsymbol{J}_R=\boldsymbol{J}_{qy}\boldsymbol{J}_{45^{\circ}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\ \mathrm{i}&\mathrm{i}\end{pmatrix} \tag{4.36}$$

$$\boldsymbol{J}_L=\boldsymbol{J}_{qx}\boldsymbol{J}_{45^{\circ}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\ -\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{pmatrix} \tag{4.37}$$

5 介质界面光学

5.1 菲涅尔公式

1. 振幅反射折射系数：

$$r_{s,p} = \frac{E^r_{s,p}}{E_{s,p}}, \quad t_{s,p} = \frac{E^t_{s,p}}{E_{s,p}} \tag{5.1}$$

2. 介质折射率表达：

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} \tag{5.2}$$

3. 电磁场表达：

$$D = \varepsilon E = n^2\varepsilon_0 E \propto n^2 E, \quad B = \sqrt{\varepsilon\mu}E = \frac{n}{c}E \propto nE, \quad H = \frac{1}{\mu_0}B \propto nE \tag{5.3}$$

4. 边界条件：

(1) E_s 切向连续：

$$E_s + E^r_s = E^t_s \tag{5.4}$$

(2) H_s 切向连续：

$$nE_s\cos\theta - nE^r_s\cos\theta = n'E^t_s\cos\theta' \tag{5.5}$$

(3) E_p 切向连续：

$$E_p\cos\theta - E^r_p\cos\theta = E^t_p\cos\theta' \tag{5.6}$$

(4) D_p 法向连续：

$$E_p\cos\theta - E^r_p\cos\theta = E^t_p\cos\theta' \tag{5.7}$$

5. **菲涅尔公式**：

$$r_p = \frac{n'\cos\theta - n\cos\theta'}{n'\cos\theta + n\cos\theta'}\ , \quad t_p = \frac{2n\cos\theta}{n'\cos\theta + n\cos\theta'}\ , \quad \frac{n'}{n}t_p - r_p = 1 \tag{5.8}$$

$$r_s = \frac{n\cos\theta - n'\cos\theta'}{n\cos\theta + n'\cos\theta'}\ , \quad t_s = \frac{2n\cos\theta}{n\cos\theta + n'\cos\theta'}\ , \quad t_s - r_s = 1 \tag{5.9}$$

6. 光功率反射折射率：

$$R_{s,p} = \frac{W^r_{s,p}}{W_{s,p}} = |r_{s,p}|^2, \quad T_{s,p} = \frac{W^t_{s,p}}{W_{s,p}} = \frac{n'\cos\theta'}{n\cos\theta}|t_{s,p}|^2, \quad R_{s,p} + T_{s,p} = 1 \tag{5.10}$$

7. 布儒斯特角：

$$r_p = 0 \Rightarrow \theta + \theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\theta_B = \frac{n'}{n} \tag{5.11}$$

8. 斯托克斯倒逆关系：

$$r + r' = 0, \quad r^2 + tt' = 1 \tag{5.12}$$

9. 半波损失的条件：

(1) 正入射：$n' > n$ $(r_p > 0,\ r_s < 0)$

(2) 掠入射：$n' > n$ 或 $n' < n$，$(r_{s,p} = -1)$

5.2 全反射与隐失波

1. 波动方程给定波速要求：

$$k = n\frac{\omega}{c}, \quad k' = n'\frac{w'}{c}, \quad {k'}^2 = {k'_x}^2 + {k'_y}^2 + {k'_z}^2 \tag{5.13}$$

2. 边界条件：

$$\omega' = \omega, \quad k'_x = k_x = k\sin\theta, \quad k'_y = k_y = 0 \tag{5.14}$$

3. 相位因子必取衰减因子：

$$k'_z = \mathrm{i}\kappa, \quad \kappa = \sqrt{k^2\sin^2\theta - {k'}^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{n^2\sin^2\theta - {n'}^2} \tag{5.15}$$

4. 将菲涅尔公式中的 $\cos\theta$ 理解为 $\dfrac{k_x}{k}$：

$$r_p = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\delta_p}, \quad t_p = \frac{2nn'}{\sqrt{(n^2-n'^2)(n^2\tan^2\theta-n'^2)}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_p}, \quad \tan\delta_p = \frac{n\sqrt{n^2\sin^2\theta-n'^2}}{n'^2\cos\theta} \tag{5.16}$$

$$r_s = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\delta_s}, \quad t_s = \frac{2n\cos\theta}{\sqrt{n^2-n'^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_s}, \quad \tan\delta_s = \frac{\sqrt{n^2\sin^2\theta-n'^2}}{n\cos\theta} \tag{5.17}$$

5. 透射场波函数：

$$E_{s,p}^t(\boldsymbol{r},t) = E_{s,p}^t \cdot \mathrm{e}^{-\kappa z} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x' x-\omega t)} \tag{5.18}$$

6. 趋肤深度：

$$H = \frac{1}{\kappa} = \frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{n^2\sin^2\theta-n'^2}} \tag{5.19}$$

7. 古斯-汉森位移：

$$\Delta_{s,p} = 2\frac{\mathrm{d}\delta_{s,p}}{\mathrm{d}k_x} = \frac{\lambda\cos\delta_{s,p}}{\pi\cos\theta}\frac{\mathrm{d}\tan\delta_{s,p}}{\mathrm{d}\theta} \tag{5.20}$$

$$\Delta_s = \frac{2H\tan\theta}{n}, \quad \Delta_p = \frac{\Delta_s}{(1+\frac{n^2}{n'^2})\sin^2\theta-1} \tag{5.21}$$

6 分子光学

6.1 吸收

1. 线性吸收规律：

$$\mathrm{d}I = -\alpha_a I\mathrm{d}x \Rightarrow I(l) = I_0\mathrm{e}^{-\alpha_a l} \tag{6.1}$$

2. 复数折射率：

$$\widetilde{n} = n(1+\mathrm{i}\kappa), \quad \kappa = \frac{c\alpha}{2n\omega} = \frac{\lambda_0\alpha}{4\pi n} \tag{6.2}$$

6.2 色散

1. 正常色散的柯西公式：

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \cdots \tag{6.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} \tag{6.4}$$

2. 反常色散的塞耳迈耶尔公式：

$$n^2 = 1 + \frac{B\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_0^2} \tag{6.5}$$

6.3 散射

1. 散射定律：

$$I(l) = I_0\mathrm{e}^{-(\alpha_a+\alpha_s)l} = I_0\mathrm{e}^{-\alpha l} \tag{6.6}$$

2. 散射光的偏振态：
   (1) 平行于入射光方向上，散射光为自然光。
   (2) 垂直于入射光方向上，散射光为线偏振光。
   (3) 二者之间的方向上，散射光为部分偏振光。
3. 瑞利散射：

$$I(\omega) \propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4} \tag{6.7}$$

$$I(\theta) = I(\frac{\pi}{2})(1+\cos^2\theta) \tag{6.8}$$

4. 米氏散射：
   $ka < 0.3 \Rightarrow$ 瑞利散射；$ka > 0.3 \Rightarrow$ 与波长关系不大
5. 拉曼散射
6. 布里渊散射

7 量子光学

7.1 黑体辐射

1. 斯忒藩-玻耳兹曼定律：
$$M_0(T) = \sigma T^4, \quad \sigma = 5.67 \times 10^{-8}\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-4} \tag{7.1}$$
2. 维恩位移定律：
$$\lambda_m T = b, \quad b = 2.897 \times 10^{-3}\mathrm{m} \cdot \mathrm{K} \tag{7.2}$$
3. 黑体辐射能谱曲线：
   (1) 维恩公式：短波符合
$$M_0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\mathrm{e}^{-\frac{hc}{\lambda kT}} \tag{7.3}$$
   (2) 瑞利-金斯公式：长波符合
$$M_0(\lambda, T) = 2\pi c\frac{kT}{\lambda^4} \tag{7.4}$$
   (3) 普朗克公式：
$$M_0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/\lambda kT} - 1} \tag{7.5}$$

7.2 光的量子性

1. 光电效应方程：
$$h\nu = W + \frac{1}{2}mv^2 = W + eU \tag{7.6}$$
2. 康普顿效应：
$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\theta \tag{7.7}$$

   Proof.
$$\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda_0\lambda}\cos\theta = p^2 \tag{7.8}$$
$$\frac{hc}{\lambda_0} + E_0 = \frac{hc}{\lambda} + E \tag{7.9}$$
$$(7.9) \Rightarrow \left(\frac{hc}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h^2c^2}{\lambda_0\lambda} = (E - E_0)^2 \tag{7.10}$$
$$(7.9) \Rightarrow \left(\frac{hc}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h^2c^2}{\lambda_0\lambda}\cos\theta = p^2c^2 \tag{7.11}$$
$$(7.11) - (7.10) \Rightarrow 2\frac{h^2c^2}{\lambda_0\lambda}(1 - \cos\theta) = 2E_0(E - E_0) = 2m_0c^2 \cdot \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0\lambda} \tag{7.12}$$
$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$$
□

3. 德布罗意物质波公式：
$$p = mv = \frac{h}{\lambda}, \quad E = mc^2 = h\nu \tag{7.13}$$
4. 不确定关系：
$$\Delta x \Delta p_x \leqslant h \tag{7.14}$$
$$\Delta x \Delta p_x \leqslant \frac{\hbar}{2} \tag{7.15}$$

7.3 玻尔氢原子理论

1. 里德伯-里兹并合原则：

$$\widetilde{\sigma} = \frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2}\right) \tag{7.16}$$

2. 波尔的氢原子理论：

(1) 定态假设

(2) 跃迁准则：

$$h\nu_{nk} = E_n - E_k \tag{7.17}$$

(3) 角动量量子化理论：

$$L = mvr = n\frac{h}{2\pi} \tag{7.18}$$

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{7.19}$$

$$r_n = n^2\left(\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}\right) = n^2 r_1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.20}$$

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = \frac{E_1}{n^2} \tag{7.21}$$

$$\widetilde{\sigma}_{nk} = \frac{1}{\lambda_{nk}} = \frac{\nu_{nk}}{c} = \frac{1}{hc}(E_n - E_k) = \frac{E_1}{hc}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right) = R_H\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{7.22}$$

7.4 激光

1. 光的吸收与辐射：自发辐射、受激辐射、受激吸收。
2. 产生激光的条件：粒子数反转、光放大。
3. 增益介质：

$$I = I_0 \mathrm{e}^{Gt} \tag{7.23}$$

4. 激光器的构成：光学谐振腔、增益介质、激励能源。
5. 光学谐振腔的作用：

(1) 控制振荡光束：

a. 限定光的方向

b. 选择光的振荡频率：$L = k\dfrac{\lambda_k}{2}$

(2) 延长增益介质。

6. 产生激光的阈值条件：

$$r_1 r_2 \mathrm{e}^{2GL} \geqslant 1 \Rightarrow G_m = -\frac{1}{2L}\ln(r_1 r_2) \tag{7.24}$$

7. 激光的纵模：振荡频率。

(1) 纵模：

$$\nu_k = \frac{c}{\lambda_k} = k\frac{c}{2nL} \tag{7.25}$$

(2) 纵模间隔：

$$\Delta\nu_k = \nu_{k+1} - \nu_k = \frac{c}{2nL} \tag{7.26}$$

(3) 纵模个数：

$$N = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_k} \tag{7.27}$$

8. 激光的横模：光束横截面上的光强稳定分布。
9. 激光的特性：高定向性、高单色性、高相干性、高亮度。
10. 激光器的种类：气体、固体、液体、半导体激光器。

8 成像光谱偏振技术

8.1 成像光谱技术

1. 成像光谱信息：二维成像、一维光谱信息。
2. 成像光谱仪分类：
   (1) 按光谱波段数：多光谱型（10 个波段）、高光谱型（10^2 个波段）、超光谱型（10^3 个波段）。
   (2) 按分光手段：色散型、干涉型、滤光片型、计算层析型、编码孔径型、三维成像型。

8.2 干涉成像光谱技术

1. 干涉成像光谱仪分类：
   (1) 时间调制型：动态的迈克尔孙干涉仪
   (2) 空间调制型：静态的萨尼亚克干涉仪
   (3) 时空调制型：萨瓦偏光镜
2. 干涉强度 $I(\Delta)$ 与光源光谱分布 $B(\sigma)$ 的关系：

$$I(\Delta)=\int_{-\infty}^{+\infty}B(\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\sigma\Delta}\mathrm{d}\sigma \tag{8.1}$$

$$B(\sigma)=\int_{-\infty}^{+\infty}I(\Delta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\sigma\Delta}\mathrm{d}\Delta \tag{8.2}$$

3. 干涉成像光谱仪的优点：
   (1) 高通量：

$$\varOmega_F R=2\pi \tag{8.3}$$

   (2) 多通道
   (3) 高信噪比：

$$\frac{(S/N)_I}{(S/N)_G}=\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T/M}}=\sqrt{M} \tag{8.4}$$

8.3 成像光谱偏振技术

1. 成像光谱偏振信息：二维成像、一维光谱、全偏振信息。
2. 新型成像光谱偏振仪的结构：成像镜模块、调制模块、干涉模块。

8.4 干涉成像大气探测（四强度法）

1. 干涉图强度：

$$I(\Delta)=I_0(1+V\cos 2\pi\sigma\Delta) \tag{8.5}$$

2. 衬比度：

$$V=\mathrm{e}^{-QT\Delta^2}=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m} \tag{8.6}$$

3. 多普勒效应：

$$\sigma=(1+\frac{v}{c}\cos\theta)\sigma_0 \tag{8.7}$$

4. 选择 Δ_0 使 $\sigma_0\Delta_0=k$：

$$I(\Delta)=I_0(1+V\cos(\varPhi_i+\varPhi)) \tag{8.8}$$

$$\varPhi_i=2\pi\sigma_0\Delta',\ \varPhi=2\pi\sigma_0\Delta_0\frac{v}{c}\cos\theta=2k\pi\frac{v}{c}\cos\theta \tag{8.9}$$

5. Δ' 从 0 开始，间隔 $\frac{\lambda}{4}$ 依次取值：

$$I_1 = I_0(1 + V\cos\Phi) \tag{8.10}$$

$$I_2 = I_0(1 - V\sin\Phi) \tag{8.11}$$

$$I_3 = I_0(1 - V\cos\Phi) \tag{8.12}$$

$$I_4 = I_0(1 + V\sin\Phi) \tag{8.13}$$

6. 由 4 个方程解出 3 个未知数：

$$I_0 = \frac{I_1 + I_3}{2} = \frac{I_2 + I_4}{2} \tag{8.14}$$

$$V = \frac{1}{2I_0}\sqrt{(I_1 - I_3)^2 + (I_2 - I_4)^2} \tag{8.15}$$

$$\tan\Phi = \frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \tag{8.16}$$