答案 1.2

1.（1） R^2 （2）$y \neq 0$ （3）R^2 （4）$y \neq x$

2.（1） $y_0(x) = 1$，

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (s^2+1)ds = 1 + x + \frac{1}{3}x^3$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x [s^2 + (1 + s + \frac{1}{3}s^3)]ds = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$$

（2） $y_0(x) = 0$，

$$y_1(x) = \int_0^x e^s ds = e^x - 1,$$

$$y_2(x) = \int_0^x (e^{2s} - e^s + 1)ds = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + \frac{1}{2}$$

3. （1）证：取 $a = \frac{1}{2}$，在矩形区域 $R = \left\{(x,y) \mid |x| \le \frac{1}{2}, |y| \le b\right\}$ 上，$f(x,y) = y^2 + \cos x^2$

连续，且关于 y 有连续的偏导数，计算 $M = \max f(x,y) = 1 + b^2$， $h = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{b}{1+b^2}\right\}$，

只要取 b=1，就可以得 h=1/2，由解的存在唯一性定理，知初始值问题的解是存在唯一的。

（2）取 $a = \frac{1}{2^{2/3}}$， $b = \frac{1}{2^{1/3}}$

（3）在区域 $|x| \le a,\ \ |y| \le b$ 上，由于 $M = 1 + \ln(1+b^2)$， $h = \min\{a, \frac{b}{1+\ln(1+b^2)}\}$

且 $\lim\limits_{b\to\infty}, \frac{b}{1+\ln(1+b^2)} = \infty$，故，对任意的正数 L,可以将 a 和 b 取得相当大，使得

在[0，L]存在唯一。

（4）取 $a = \frac{1}{2^{1/2}}$， $b = \frac{1}{2^{1/2}}$

4. 提示：代 $\phi(x), \psi(x)$ 到微分方程验证即可。注意体会有两个解的原因。

5. 证明：令 $u(t) = C + \int_0^t f(s)g(s)ds$，则 $u(0) = C,\ f(t) \le u(t)$，

求导得：$u'(t) = f(t)g(t) \le u(t)g(t)$，

不等式两边同时乘以 $\exp\left(-\int_0^t g(t)dt\right)$ 后整理得

$\frac{d}{dt}\left(u(t)\exp\left(-\int_0^t g(t)dt\right)\right) \le 0$，两边关于 t 积分整理得

$$\left(u(t)\exp\left(-\int_0^t g(t)dt\right)\right) \le u(0), \quad f(t) \le u(t) \le C\exp\left(\int_0^t g(t)dt\right)$$

6． 区域 $|x| \le a, \quad |y| \le b$ 上，由于 $M = \left|3+\sin(1+y^2)\right| \le 4$，$h = \min\{a, b/4\}$

对任意的正数 N,可以将 a 和 b 取得相当大，使得在[-N，N]存在唯一。

7．提示：由于函数满足 Lipschitz 条件，初始值问题的必定解惟一，方程两边同时乘以 $\exp\left(\int_0^x p(t)dt\right)$ 后整理得

$\frac{d}{dx}\left(y(x)\exp\left(\int_0^x p(t)dt\right)\right) = q(x)\exp\left(\int_0^x p(t)dt\right)$，这样就变成了关于函数

$z(x) = y(x)\exp\left(\int_0^{xt} p(t)dt\right)$ 的方程，$z'(x) = q(x)(x)\exp\left(\int_0^x p(t)dt\right)$

就可以容易证明解的存在性。

8．证明：假设在 $x \ge x_0$ 一侧有两个解 $y_1(x)和y_2(x)$，且 $y_1 > y_2$，则由 $f(x,y)$ 是 y 的非增函数，因此 $f(x,y_1) - f(x,y_2) \le 0$，即 $(y_1 - y_2)' \le 0$，可以得出 $y_1 - y_2$ 是非增的，而在 x_0 点有 $y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0$，这与 $y_1(x) > y_2(x)$ 矛盾，假设不成立，只有一解

9．提示：作逐步逼近函数序列，$\phi_0(x) = f(x)$

$$\phi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,\xi)\phi_n(\xi)d\xi, n = 0,1,2,....$$

利用初始值问题解的存在唯一性定理证明的思路

10．提示：首先判断出满足唯一性条件的 h, L 和 M，由 $\left|\phi_n(x) - \phi(x)\right| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1} < 0.05$ 判断出要进行的迭代次数 n，应用 Picard 迭代即可，答案是

$$\phi(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}$$