复习题•答案3

1. 直接验证（略）。

2. . 直接验证（略）。

3.

（1） $y(x)=c_1e^{5x}\cos 3x+c_2e^{5x}\sin 3x$

（2） $y(x)=c_1e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2})+c_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})$

（3） $x(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{-t}$

（4） $y(t)=(c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^3)e^t$

（5） $y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3x^3+c_4x^2+c_5x\ +c_6$

4.

（1）

$$y(x)=-\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)+\_C1\ \mathbf{e}^x+\_C2\ \mathbf{e}^{(-1/2\,x)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ x\right)$$
$$+\_C3\ \mathbf{e}^{(-1/2\,x)}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ x\right)$$

(2) $y(x)=\mathbf{e}^{(2x)}\_C2+\mathbf{e}^{(2x)}x\_C1+\mathbf{e}^x+\frac{1}{2}x^2\mathbf{e}^{(2x)}+\frac{1}{4}$

(3) $y(x)=\mathbf{e}^x\sin(x)\_C2+\mathbf{e}^x\cos(x)\_C1+\frac{1}{4}\mathbf{e}^x(x\cos(x)+\sin(x)x^2-\sin(x))$

(4) $y(x)=\sin(x)\_C2+\cos(x)\_C1+\frac{1}{4}\sin(x)+\frac{2}{3}\cos(x)^2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cos(x)x$

(5) $y(x)=-x+\_C1\ \mathbf{e}^x+\_C2\ \mathbf{e}^x x+\_C3\ \mathbf{e}^x x^2$

(6)

$$y(x)=-\frac{1}{64}\cos(2x)-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{15}\mathbf{e}^x+\_C1\ \mathbf{e}^{(-2x)}+\_C2\ \mathbf{e}^{(2x)}+\_C3\ \cos(2x)$$
$$+\_C4\ \sin(2x)$$

(7) $y(x)=\sin(x)\_C2+\cos(x)\_C1+\dfrac{\frac{1}{2}(2\cos(x)^2-1)}{\sin(x)}$

(8)

$$x(t)=e^{t}+\_C1\ e^{(-1/2\sqrt{2}\,t)}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\ t\right)+\_C2\ e^{(1/2\sqrt{2}\,t)}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\ t\right)$$
$$+\_C3\ e^{(-1/2\sqrt{2}\,t)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\ t\right)+\_C4\ e^{(1/2\sqrt{2}\,t)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\ t\right)$$

(9)

$$x(t)=\sin(2\,t)\,\_C2+\cos(2\,t)\,\_C1-\frac{4}{5}\cos(t)^3-\frac{1}{2}t\cos(t)^2$$
$$+\frac{1}{40}(24+5\sin(t))\cos(t)+\frac{1}{4}t$$

5. 设两个解组，利用Liouville公式，代入整理就可以得到结论。

6. 将两个解分别代入方程，关于两个系数直接解出即可。

7. $y=x[c_1+c\int\frac{1}{x^2}e^{\int xf(x)dx}dx]$

8.

对应齐次方程的通解是： $y_c(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-7x}$,利用常数变易法得：

$c_1'(x)e^{-x}+c_2'(x)e^{-7x}=0$， $-c_1'(x)e^{-x}-7c_2'(x)e^{-7x}=q(x)$， 求解得：

$c_1'(x)=\frac{e^xq(x)}{6}$， $c_2'(x)=-\frac{e^{7x}q(x)}{6}$， 原方程的特解为：

$$y_p(x)=c_1(x)e^{-x}+c_2(x)e^{-7x}=e^{-x}\int_0^x\frac{e^xq(x)}{6}dx-e^{-7x}\int_0^x\frac{e^{7x}q(x)}{6}dx$$

原方程的通解为 $y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-7x}+e^{-x}\int_0^x\frac{e^xq(x)}{6}dx-e^{-7x}\int_0^x\frac{e^{7x}q(x)}{6}dx$

$q(x)$有界时， $\left|e^{-x}\int_0^x\frac{e^xq(x)}{6}dx\right|\le\left|Me^{-x}\int_0^xe^xdx\right|=\left|Me^{-x}(e^x-1)\right|\le M$,

$\left|e^{-7x}\int_0^x\frac{e^{7x}q(x)}{6}dx\right|\le\left|Me^{-7x}\int_0^xe^{7x}dx\right|=\left|Me^{-x}(e^x-1)/7\right|\le M/7$,

$|y(x)|\le|c_1|+|c_2|+2M$， 当$q(x)$有极限时：

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=\lim_{x\to\infty}\left(c_1e^{-x}+c_2e^{-7x}+\frac{\int_0^x\frac{e^xq(x)}{6}dx}{e^x}-\frac{\int_0^x\frac{e^{7x}q(x)}{6}dx}{e^{7x}}\right)=0$$

9. 证明

原方程的通解为 $y(x)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+e^{r_1x}\int_0^x\frac{e^{-r_1x}f(x)}{r_1-r_2}dx-e^{r_2x}\int_0^x\frac{e^{-r_2x}f(x)}{r_1-r_2}dx$

其中，r_1和r_2是方程 $r^2+2\beta r+1=0$的解，$r=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-1}$,

$y(x)$为周期解时，有界时，$y(\omega)=y(0)$, $y'(\omega)=y'(0)$, 即

$$c_1e^{r_1\omega}+c_2e^{r_2\omega}+e^{r_1\omega}\int_0^\omega\frac{e^{-r_1x}f(x)}{r_1-r_2}dx-e^{r_2\omega}\int_0^\omega\frac{e^{-r_2x}f(x)}{r_1-r_2}dx=c_1+c_2$$

$$c_1r_1e^{r_1\omega}+c_2r_2e^{r_2\omega}+r_1e^{r_1\omega}\int_0^\omega\frac{e^{-r_1x}f(x)}{r_1-r_2}dx-r_2e^{r_2\omega}\int_0^\omega\frac{e^{-r_2x}f(x)}{r_1-r_2}dx=c_1r_1+c_2r_2,$$

关于常数c_1和c_2的方程组为

$$c_1\left(e^{r_1\omega}-1\right)+c_2\left(e^{r_2\omega}-1\right)=-e^{r_1\omega}\int_0^\omega\frac{e^{-r_1x}f(x)}{r_1-r_2}dx+e^{r_2\omega}\int_0^\omega\frac{e^{-r_2x}f(x)}{r_1-r_2}dx$$

$$c_1r_1\left(e^{r_1\omega}-1\right)+c_2r_2\left(e^{r_2\omega}-1\right)=-r_1e^{r_1\omega}\int_0^\omega\frac{e^{-r_1x}f(x)}{r_1-r_2}dx+r_2e^{r_2\omega}\int_0^\omega\frac{e^{-r_2x}f(x)}{r_1-r_2}dx,$$

该方程组关于c_1和c_2的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}\left(e^{r_1\omega}-1\right) & \left(e^{r_2\omega}-1\right)\\ r_1\left(e^{r_1\omega}-1\right) & r_2\left(e^{r_2\omega}-1\right)\end{vmatrix}=(r_2-r_1)\left(e^{r_2\omega}-1\right)\left(e^{r_1\omega}-1\right)\neq 0.$$

所以，有惟一的一组c_1和c_2，使得它们确定的解是周期解。

10. 提示：等式两边对t求导，然后用常数变异法求解

方程为 $\frac{d^2x}{dx^2}+2\frac{dx}{dx}+x=f'(t)$

对应齐次方程的通解是：$x_c(t)=(c_1+tc_2)e^{-t}$, 利用常数变易法得：

$c_1'(t)+c_2'(t)t=0$, $-c_1'(x)e^{-t}+c_2'(x)(1-t)e^{-t}=f'(t)$, 求解得：

$c_1'(x)=-te^{-t}f'(t)$, $c_2'(t)=e^{-t}f'(t)$, 原方程的通解为：

$$x(t)=(c_1+tc_2)e^{-t}-e^{-t}\int_0^t te^{-t}f'(t)dt+te^{-t}\int_0^t e^{-t}f'(t)dt$$

11

(1)

```
restart:
eq:=diff(x(t),t$2)-diff(x(t),t)-2*x(t)=exp(3*t)*cos(2*t);
dsolve(eq,x(t));
```

$$equ1 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}x(t)\right)-2\,x(t)=e^{(3\,t)}\cos(2\,t)$$

$$x(t) = e^{(-t)}\_C2 + e^{(2t)}\_C1 + \frac{1}{10}\sin(2t)\,e^{(3t)}$$

(2)

```
restart:
eq:=diff(x(t),t$2)+x(t)=t+2*exp(-t);
dsolve([eq,x(0)=1,D(x)(0)=-2],x(t));
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t)\right) + x(t) = t + 2\,e^{(-t)}$$

$$x(t) = -2\sin(t) + (t\,e^{t} + 1)\,e^{(-t)}$$

12.

```
restart:
eq:=diff(x(t),t$3)-5*diff(x(t),t$2)
+9*diff(x(t),t)-5*x(t)=0;
dsolve([eq,x(0)=0,D(x)(0)=1,D(D(x))(0)=6],x(t));
```

$$eq := \left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}x(t)\right) - 5\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t)\right) + 9\left(\frac{\partial}{\partial t}x(t)\right) - 5\,x(t) = 0$$

$$x(t) = e^{t} + 2\,e^{(2t)}\sin(t) - e^{(2t)}\cos(t)$$