答案 2

1

.1 ） $\ln|y|+\frac{1}{2}y^2=\tan x+c$，

2） $\ln y-\frac{x}{y}(1+\ln y-\ln x)=c$

3） $2xy^3+\frac{1}{3}y^3+x^3=c$，

4） $\frac{4}{3}y^3+3xy^2+x^2=c$，

5） $Q=\dfrac{\frac{1}{5}t^5\ln t-\frac{1}{25}t^5+c}{t}$，

6) $\frac{1}{2}y+x+\frac{3}{4}=ce^{2y}$

2.

1） $\frac{1}{2}y^2\ln y-\frac{1}{4}y^2=xe^x-e^x-\frac{1}{4}$，

2） $x(t)=\frac{-t}{2}\sqrt{18t^4-2}$，

3） $1-4y=5(\frac{x^2+4}{4})^{-4}$，

4） $y=\dfrac{1}{(1-\ln x)x^4}$

5） $1+e^{-2y}=2e^{-x}$

6） $\frac{3}{2}r^2+r\sin\theta-\frac{1}{2}r^2\cos 2\theta=10$

3.

1） $t-e^{\frac{x}{t}}+c=0$，

2） $\sin\theta=\frac{1}{3t}+ct^2$，

3） $t^2x^2=t^3-3t^2+c$

4） $\tan\theta=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}+ce^{t^2}$，

5） $t-\ln(\ln(t+x))+c=0$

6） $t^2 = -x^2 - 1 + ce^{x^2}$,

7） $\cos t + e^{x+t} = c$

8） $t - \arcsin(tx) + c = 0$,

9） $t^2(\arctan x - 1) = c$

10） $\frac{1}{x+t} + t + c = 0$,

11） $\frac{\ln x}{t+1} + t + c = 0$

12） $\ln t - \frac{1}{2}xt - \frac{1}{2}\ln(xt) + c = 0$,

13） $\frac{1}{(t+x)^2} = t^2 + 1 + ce^{t^2}$

14） $x^2 + y^2 = -e^{2x}$,

15） $xt = -\ln(2-t)$,

16） $x = e^{\frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4} - \frac{t}{2}}$

17） $\sin\theta = 1 - e^{t^2}$,

18） $x = t^2 \arcsin\frac{\sqrt{2}t}{4}$

19） $x = ye^{xy-1}$,

20） $x^{-2} = (t^2 - 2t + c)(t+1)$

4.

1） $-x^2 - xy + 3y + y^3 = c$,

2） $y - xe^{-y} = c$

3） $\ln(x^2 + y^2) - 2\arctan\frac{y}{x} = c$,

4） $x^2 y + xy^2 + x = c$

5) $x^2+y^2+1=ce^{y^2}$,

6) $x^2y+\cos x=c$,

7) $x^2y+x+y^2=c$

8) $\frac{1}{3}x^3+xy+e^y=c$,

9) $y(e^x+1)^2=ce^x$,

10) $y^3+3y=x^3-3x+2$

11) $\sin y\sin^2 x=c$,

12) $\frac{x^2}{y}-\arctan\frac{x}{y}+c=0$,

13) $2x^2y+x^2-y^2=c$

14) $2\sin x\cos 2y=\sin^2 x+c$,

15) $xy^3+2xy-x^3=c$,

16) $y=e^{xy^2}$

17) $y^2=cxe^{x+y+\frac{1}{x}}$,

18) $x^3y^2+xy^3=12$

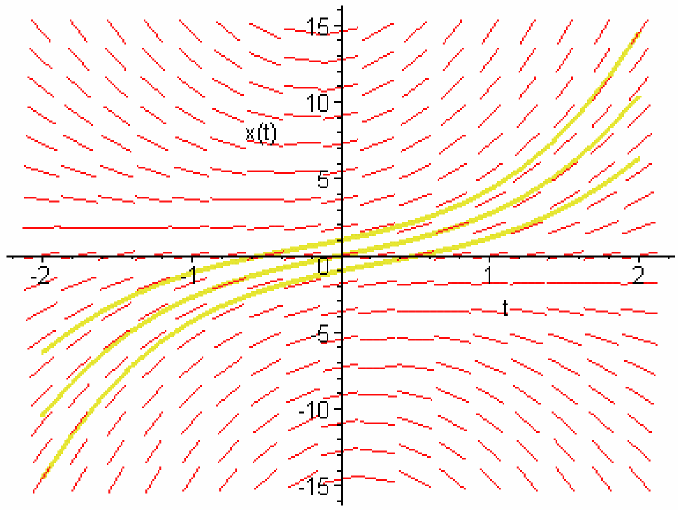
5．程序如下，只给出1题，其他类似（图略）

1）

下面的程序是求方程的解和画图

```
restart:with(plots): with(DEtools):
dsolve(diff(x(t),t)-x(t)*sin(t)-2,implicit);
DEtools[phaseportrait]
([diff(x(t),t)=x(t)*sin(t)+2],
x(t),t=-2..2,
[[x(0)=0],[x(0)=-1],[x(0)=1]],
dirgrid=[17,17],
arrows=LINE,
axes=NORMAL);
```

$$x(t) = e^{(-\cos(t))} \int 2\, e^{\cos(t)}\, dt + e^{(-\cos(t))}\, \_C1$$

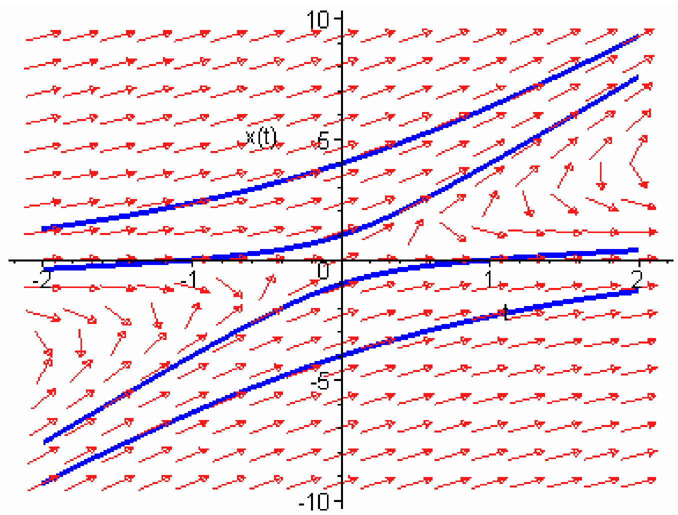


2)

```
 restart:with(plots): with(DEtools):
ode2:=diff(x(t),t)+(t-2*x(t))/(x(t)-2*t);
dsolve(ode2,implicit);
DEtools[phaseportrait]
([ode2], x(t),t=-2..2,
[[x(0)=-4],[x(0)=-1],[x(0)=1],[x(0)=4]],
dirgrid=[17,17],
arrows=slim,linecolor=blue,
axes=NORMAL);
```

$$ode2 := \left(\frac{\partial}{\partial t}\, x(t)\right) + \frac{t - 2\, x(t)}{x(t) - 2\, t}$$

$$-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{t^2 - 4\, x(t)\, t + x(t)^2}{t^2}\right) - \ln(t) - \_C1 = 0$$

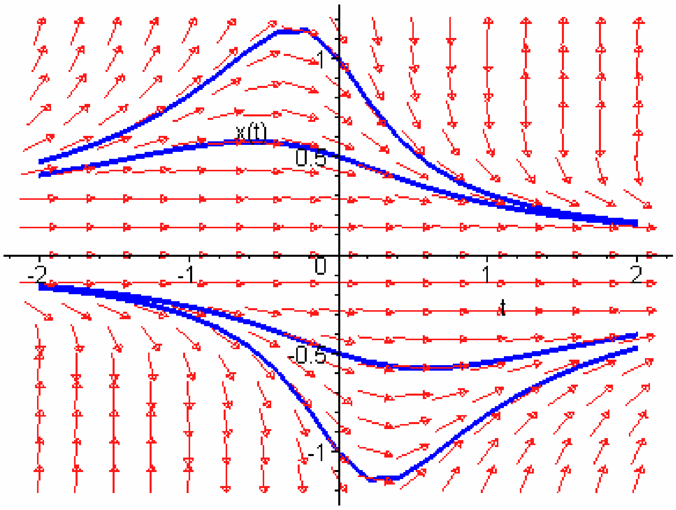


3)

```
> restart:with(plots): with(DEtools):
ode3:=diff(x(t),t)+(3*t*x(t)^3+x(t)^2)/(1-t*x(t));
dsolve(ode3,implicit);
DEtools[phaseportrait]
([ode3], x(t),t=-2..2,
[[x(0)=-1],[x(0)=-1/2],[x(0)=1/2],[x(0)=1]],
dirgrid=[17,17],
arrows=slim,linecolor=blue,
axes=NORMAL);
```

$$ode3 := \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right) + \frac{3\,t\,\mathrm{x}(t)^3 + \mathrm{x}(t)^2}{1 - t\,\mathrm{x}(t)}$$

$$\ln(t) - \_C1 - \ln(t\,\mathrm{x}(t)) + \frac{1}{2}\ln(t\,\mathrm{x}(t) + 1) + \frac{1}{2}\ln(3\,t\,\mathrm{x}(t) - 1) = 0$$

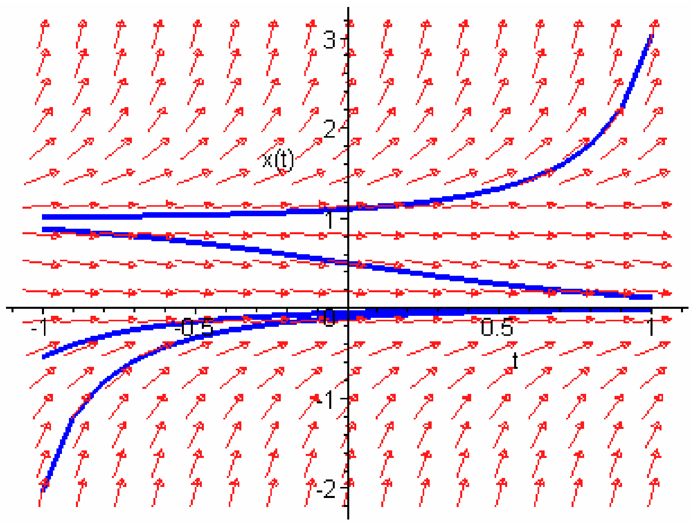


4)

```
> restart:with(plots): with(DEtools):
ode4:=diff(x(t),t)-2*x(t)*(x(t)-1);
dsolve(ode4,implicit);
DEtools[phaseportrait]
([ode4], x(t),t=-1..1,
[[x(0)=-1/10],[x(0)=-1/20],[x(0)=1/2],[x(0)=1.1]],
dirgrid=[17,17],
arrows=slim,linecolor=blue,
axes=NORMAL);
```

$$ode4 := \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right) - 2\,\mathrm{x}(t)\,(\mathrm{x}(t) - 1)$$

$$\frac{1}{\mathrm{x}(t)} - 1 - \mathbf{e}^{(2\,t)}\,\_C1 = 0$$



6.　Picard 迭代法

1）
```
y0:=1;
y1:=1+int(3*y0+exp(2*t),t=0..x);yy1:=subs(x=t,y1):
y2:=1+int(3*yy1+exp(2*t),t=0..x);yy2:=subs(x=t,y2):
y3:=1+int(3*yy2+exp(2*t),t=0..x);yy3:=subs(x=t,y3):
y4:=1+int(3*yy3+exp(2*t),t=0..x);yy4:=subs(x=t,y4):
y5:=1+int(3*yy4+exp(2*t),t=0..x);yy5:=subs(x=t,y5):
```

$$y0 := 1$$

$$y1 := \frac{1}{2} + 3\,x + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{(2\,x)}$$

$$y2 := -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\,x + \frac{9}{2}\,x^2 + \frac{5}{4}\,\mathbf{e}^{(2\,x)}$$

$$y3 := -\frac{11}{8} - \frac{3}{4}\,x + \frac{9}{4}\,x^2 + \frac{9}{2}\,x^3 + \frac{19}{8}\,\mathbf{e}^{(2\,x)}$$

$$y4 := -\frac{49}{16} - \frac{33}{8}\,x - \frac{9}{8}\,x^2 + \frac{9}{4}\,x^3 + \frac{27}{8}\,x^4 + \frac{65}{16}\,\mathbf{e}^{(2\,x)}$$

$$y5 := -\frac{179}{32} - \frac{147}{16}\,x - \frac{99}{16}\,x^2 - \frac{9}{8}\,x^3 + \frac{27}{16}\,x^4 + \frac{81}{40}\,x^5 + \frac{211}{32}\,\mathbf{e}^{(2\,x)}$$

2）
```
restart:y0:=0;
y1:=int(t^2+y0^3,t=0..x);yy1:=subs(x=t,y1):
y2:=int(t^2+yy1^3,t=0..x);yy2:=subs(x=t,y2):
y3:=int(t^2+yy2^3,t=0..x);yy3:=subs(x=t,y3):
```

$$y0 := 0$$

$$y1 := \frac{1}{3}\,x^3$$

$$y2 := \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{270}\,x^{10}$$

$$y3 := \frac{1}{610173000}x^{31} + \frac{1}{1749600}x^{24} + \frac{1}{13770}x^{17} + \frac{1}{270}x^{10} + \frac{1}{3}x^3$$

7．用 Euler 折线和改进的 Euler 折线法

1)利用语句

```
>dsolve({diff(y(x),x)=y(x)/(1-x^2)+1+x,y(0)=1},y(x));
```

求出精确解为

$$y(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x) + 1\right)(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

程序如下：

```
> restart:
printlev1:=0;
 h:=0.05;  x0:=0;
 y0:=1;  z0:=1;  w0:=1;
f1:=(x,y)->1+x+y/(1-x^2);
f2:=(x,y)->1+2*x*y/(1-x^2)^2+(1+x+y/(1-x^2))/(1-x^2);
fy:=x-> (1/2*x*sqrt(1-x^2)
+1/2*arcsin(x)+1)*(x+1)/(1-x^2)^(1/2);
 for n from 0 to 17 do;
 x||(n+1):=h*(n+1);
 y||(n+1):=y||n+h*f1(x||n,y||n);
 z||(n+1):=z||n+h*f1(x||n,z||n)+h^2*f2(x||n,z||n)/2;
 w||(n+1):=fy(x||(n+1));
 print(x||(n+1),y||(n+1),z||(n+1), w||(n+1));
 od:
```

$$printlev1 := 0$$

$$h := .05$$

$$x0 := 0$$

$$y0 := 1$$

$$z0 := 1$$

$$w0 := 1$$

$$f1 := (x, y) \to 1 + x + \frac{y}{1-x^2}$$

$$f2 := (x, y) \to 1 + \frac{2\,x\,y}{(1-x^2)^2} + \frac{1 + x + \frac{y}{1-x^2}}{1-x^2}$$

$$fy := x \to \frac{\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(x)+1\right)(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

.05, 1.10, 1.103750000, 1.103858804

.10, 1.207637845, 1.215666878, 1.215911221

.15, 1.323629655, 1.336563609, 1.336977492

.20, 1.448834497, 1.467423675, 1.468050911

.25, 1.584294627, 1.609450940, 1.610348852

.30, 1.731290340, 1.764138485, 1.765383336

.35, 1.891416183, 1.933365575, 1.935060786

.40, 2.066689185, 2.119537476, 2.121826414

.45, 2.259706398, 2.325792484, 2.328878987

.50, 2.473880780, 2.556317990, 2.560500648

.55, 2.713806165, 2.816850602, 2.822582595

.60, 2.985844241, 3.115501793, 3.123501108

.65, 3.299113322, 3.464192436, 3.475658619

.70, 3.667250839, 3.881307114, 3.898383763

.75, 4.111785235, 4.397011180, 4.423881990

.80, 4.669203548, 5.065064682, 5.110942828

.85, 5.407704041, 5.993063328, 6.082146132

.90, 6.474565129, 7.437639542, 7.654380019

其中，第一列为自变量的值，第二、三列分别为 Euler 折线和改进的 Euler 折线法得到的近似值，最后一列为精确解的值

2）

```
> dsolve([diff(y(x),x)=2*x/(y(x)+x^2*y(x)),y(0)=-2],y(x));
```

$$y(x) = -\sqrt{2\ln(1+x^2)+4}$$

```
> restart:
printlev1:=0;
 h:=0.05;  x0:=0;
 y0:=-2;  z0:=-2;  w0:=-2;
f1:=(x,y)->2*x/(y+x^2*y);
f2:=(x,y)->-2/y*(-1+x^2)/(1+x^2)^2;
```

```
fy:=x-> -sqrt(2*ln(1+x^2)+4);
 for n from 0 to 19 do;
 x||(n+1):=h*(n+1);
 y||(n+1):=y||n+h*f1(x||n,y||n);
 z||(n+1):=z||n+h*f1(x||n,z||n)+h^2*f2(x||n,z||n)/2;
 w||(n+1):=fy(x||(n+1));
 print(x||(n+1),y||(n+1),z||(n+1), w||(n+1));
 od:
```

$$printlev1 := 0$$

$$h := .05$$

$$x0 := 0$$

$$y0 := \text{-}2$$

$$z0 := \text{-}2$$

$$w0 := \text{-}2$$

$$f1 := (x, y) \to 2\,\frac{x}{y + x^2\,y}$$

$$f2 := (x, y) \to -2\,\frac{-1 + x^2}{y\,(1 + x^2)^2}$$

$$fy := x \to -\sqrt{2\,\ln(1 + x^2) + 4}$$

.05, -2., -2.001250000, -2.001248051

.10, -2.002493766, -2.004982097, -2.004968993

.15, -2.007438096, -2.011130393, -2.011094532

.20, -2.014745881, -2.019586986, -2.019515146

.25, -2.024290891, -2.030207823, -2.030086019

.30, -2.035914424, -2.042820097, -2.042634424

.35, -2.049433134, -2.057230449, -2.056967837

.40, -2.064647293, -2.073233257, -2.072882054

.45, -2.081348818, -2.090618373, -2.090168760

.50, -2.099328523, -2.109177875, -2.108622086

.55, -2.118382234, -2.128711552, -2.128043935

.60, -2.138315600, -2.149031043, -2.148247984

.65, -2.158947562, -2.169962662, -2.169062418

.70, -2.180112597, -2.191349063, -2.190331537

.75, -2.201661881, -2.213049925, -2.211916410

.80, -2.223463594, -2.234941885, -2.233694805

.85, -2.245402558, -2.256917897, -2.255560562

.90, -2.267379410, -2.278886220, -2.277422598

.95, -2.289309466, -2.300769167, -2.299203693

1.00, -2.311121413, -2.322501743, -2.320839150

8. 设 t 时刻子弹的速度为 v(t)，由题意得，$\frac{dv(t)}{dt}=-kv^2(t),\quad v(0)=200m/s$

解得，$t-\frac{1}{kv}=c$，由条件得 $-\frac{1}{200k}=c,\quad t_1-\frac{1}{80k}=c,\quad t_1=\frac{3}{400k}$，利用

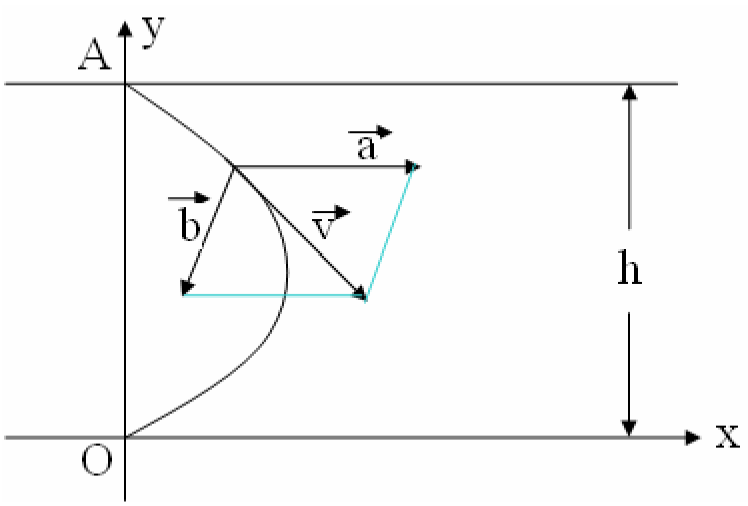
$$10=\int_0^{t_1}\frac{1}{kt+1/200}dt=\frac{1}{k}\ln(kt+1/200)\Big|_0^{t_1}=\frac{\ln(5/2)}{k},$$

最后得 $\frac{1}{k}=10.91,\quad t_1=\frac{3}{400k}=0.08s$。

9. 解：

(此题目详细的解答可以在西南大学出版的常微分方程教材 48 页例 2.12 中找到)

建立如下图所示的坐标系



设水流的速度为 $\vec{a}$，船的速度为 $\vec{b}$，实际航行速度为 $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$.

设t时刻船的位置为 P(x, y)，则， $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}=\left\{v_x, v_y\right\}=\left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right\}$,

利用几何关系得：$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}=\left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right\}=\left\{a-\frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{by}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$,

方程和初始条件为： $\frac{dx}{dy}=-\frac{a}{b}\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}+\frac{x}{y}$, $x(h)=A$.

求解得： $x=\frac{h}{2}\left(\left(\frac{y}{h}\right)^{1-a/b}-\left(\frac{y}{h}\right)^{1+a/b}\right)$, $0\le y\le h$.

10.显然 2 小时后，容器中的液体将变为零，则我们考虑的时间段为]0，120]，设任意时刻的盐水的含盐量为 G(t),则此时的浓度为：G(t)/(60-0.5t),即求出 G(t)即可.

由题意知：G(t+ Δt)-G(t)=3*2* Δt -2.5* Δt *G(t)/(60-0.5t),

则：G'(t)=6-5G(t)/(120-t), G(0)=0

$$\text{解得：} G(t)=\frac{(t-120)^5}{138240000}+180-\frac{3}{2}t$$

11.设 t 时刻的溶解的为 p(t),根据题目的加假设，我们得到微分方程：

$\frac{dp}{dt}=k(4-p/2)(5-p)$, $p(0)=0$, 解得： $p(t)=\frac{8e^{3kt/2}-8}{8e^{3tk/2}/5-1}$

利用 p(1)=1 得，$k=\frac{2}{3}\ln\frac{35}{32}\approx 0.06$， 代入得 $p(t)=\frac{8e^{0.09t}-8}{8e^{0.09t}/5-1}$

4 小时时，未溶解的量为：5-p(4)=2.32;

3 小时时，浓度为 p(3)/2=1.13

由 p(T)/2=2 得：T=10.18

12.解：设电容上电压任意时刻为 U(t),根据电学定律，我们得到微分方程： $\frac{dU}{dt}=-\frac{U}{cR}$

解得：$U=Ee^{\frac{-t}{Rc}}$

13. 根据体积、面积和高的关系得方程：

$\frac{dV}{dt}=-kS=-k\sqrt{\frac{2lwV}{h}}$, $V(0)=lhw/2$, k 为比例系数，答案：$\sqrt{V(t)} = -k\sqrt{\frac{wl}{2h}}t + \sqrt{whl/2}$

14.提示：由于宣传信息和购买者的口头宣传都对购买有利，设 t 时刻购买率与未购买者的数量与购买者和宣传的效益之和乘积成比例，记 x(t)为 t 时刻购买者人群的数量，则购买者人群的变化率满足：

$$\frac{dx}{dt} = r(K-x)(x+a), \quad x(0)=0$$

这里 a 为广告宣传的效益，解得

$$x(t) = \frac{ae^{r(a+K)t} - a}{1 + ae^{r(a+K)t}/K}$$

注： 这里只是其中一种假设。

15. 年初一次存入 10000 元，年末的存款为：

每年结算一次：$10000(1+0.03) = 10300$

每半年结算一次：$10000\left(1+\frac{0.03}{2}\right)^2 = 10302.25$

每季度结算一次：$10000\left(1+\frac{0.03}{4}\right)^4 = 10303.39191$

每月结算一次：$10000\left(1+\frac{0.03}{12}\right)^{12} = 10304.15957$

每天结算一次：$10000\left(1+\frac{0.03}{365}\right)^{365} = 10304.53346$

每年结算 n 次：$10000\left(1+\frac{0.03}{n}\right)^n$

极限：$\lim_{n\to\infty} 10000\left(1+\frac{0.03}{n}\right)^n = 10000e^{0.03} = 10304.54534$

年初一次存入 10000 元，复利连续计算，一年中将 12000 元连续存如，记 t 时刻他在银行的存款为 x(t), 取时间单位为年，则

$$\frac{dx}{dt} = 0.03x + 12000, \quad x(0) = 10000$$

求解得： $x(t) = 410000e^{0.03t} - 400000$

年末的存款为：x(1)= 22486.3589

年初一次存入 10000 元，每个月处再存入 1000 元，每个月结算一次，年末的存款为：

$$\begin{aligned}&10000\left(1+\frac{0.03}{12}\right)^{12}+\sum_{k=1}^{12}1000\left(1+\frac{0.03}{12}\right)^{k}\\&=10000\left(1+\frac{0.03}{12}\right)^{12}+1000\left(1+\frac{0.03}{12}\right)\frac{\left(1+\frac{0.03}{12}\right)^{12}-1}{0.03/12}\\&=22490.81968\end{aligned}$$

年初一次存入 10000 元，每个月处再存入 1000 元，连续计算，

$$\frac{dx}{dt}=0.03x,\quad x(0)=11000,\quad t\neq 1,2,...,11$$

$$x(n)=x(n^-)+1000,\quad n=1,2,...,11$$

在第 1 个月内

$$x(t)=11000e^{0.03t},\quad x(1/12)=11027.53441$$

在第 2 个月内

$$x(t)=12027.53441\ e^{0.03(t-1/12)},\quad x(2/12)=12057.64087$$

在第 3 个月内

$$x(t)=13057.64087\ e^{0.03(t-2/12)},\quad x(3/12)=13090.32582$$

在第 4 个月内

$$x(t)=14090.32582\,e^{0.03(t-3/12)},\quad x(4/12)=14125.59571$$

在第 5 个月内

$$x(t)=15125.59571\,e^{0.03(t-4/12)},\quad x(5/12)=15163.45701$$

在第 6 个月内

$$x(t)=16163.45701\,e^{0.03(t-5/12)},\quad x(6/12)=16203.91621$$

在第 7 个月内

$$x(t)=17203.91621\,e^{0.03(t-6/12)},\quad x(7/12)=17246.97981$$

在第 8 个月内

$$x(t)=18246.97981e^{0.03(t-7/12)},\quad x(8/12)=18292.65434$$

在第 9 个月内

$$x(t)=19292.65434e^{0.03(t-8/12)},\quad x(9/12)=19340.94632$$

在第 10 个月内

$$x(t)=20340.94632e^{0.03(t-9/12)},\quad x(10/12)=20391.86231$$

在第 11 个月内

$$x(t) = 21391.86231e^{0.03(t-10/12)}, \quad x(11/12) = 21445.40888$$

在第 12 个月内

$$x(t) = 22445.40888e^{0.03(t-11/12)}, \quad x(12/12) = 22501.59261$$

年末的存款为：225015926

读者可以比较这些结果，试探不同的存款方式

16.

1） 考虑单位长度的管段，方程为：

$$-k2\pi r\frac{dU}{dr} = q, \quad U(10) = 200, \quad U(20) = 50$$

解为：$U(r) = 350 + 150\frac{\ln 5}{\ln 2} - \frac{150}{\ln 2}\ln r$

2）112.2 度

3）4079 卡

17.可以用两种方法解决

1）建立方程，求解

设开始时 4 个人分别处于点 A（1，1），B（-1，1），C（-1，-1），D（1，-1）

当 A 的坐标为 A(x,y)时，由对称性得, B(-x,y) , A(-x,-y), A(x,-y)

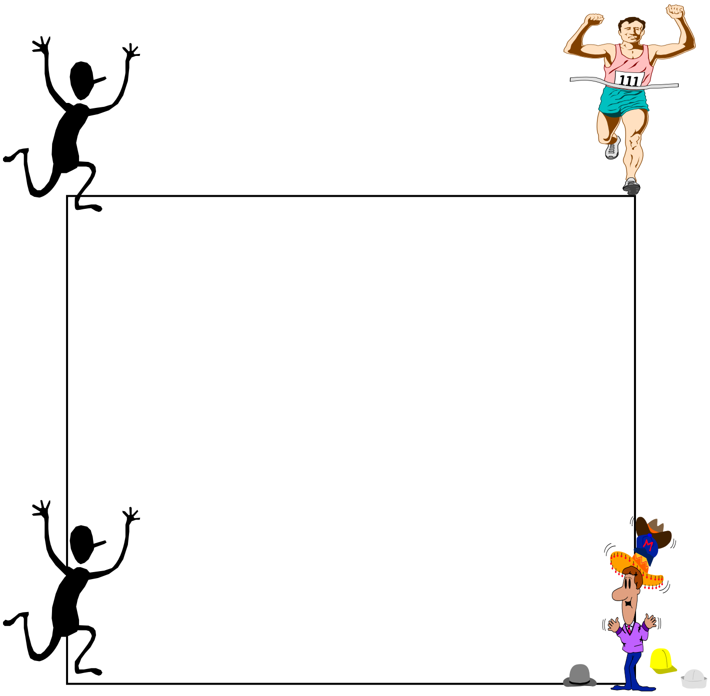
方程为：$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}, \quad x(1) = 1$

求解得：$\ln\sqrt{x^2 + y^2} + \arctan\frac{y}{x} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$

其极坐标方程为：$r = \sqrt{2}e^{\pi/4-\theta}$,

2）利用计算机模拟：根据运动过程逐步模拟。

示意图如下：



建立平面直角坐标系

取时间间隔为Δt, 在Δt 间隔中,每个人都沿直线行进, 计算每个人在一时刻 t 的下一时刻 t+Δt 的位置(坐标).设甲追逐乙,t 时刻甲的坐标为(xa，ya),乙的坐标为(xb，yb),

则甲在 t+Δt 的坐标为(xa+vΔt*cosα ，ya+vΔt*sinα),

其中

$$\cos\alpha = \frac{(x_b - x_a)}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{(y_b - y_a)}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}$$

由此得到这一问题的算法为

赋初值:采样间隔Δt,行进速度 v,及各点起始位置,终止时刻 t;

确定循环次数 n(Δt 的个数);

i=1,2,3,4(人的编号)循环计算: j=1,2,3,…,n 循环计算:

$$x_{i,j+1} = x_{i,j} + \frac{(x_{i+1,j} - x_{i,j})}{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}},$$

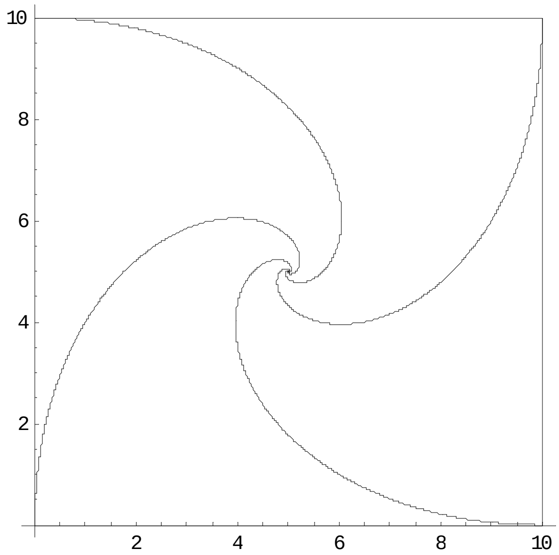
$$y_{i,j+1} = y_{i,j} + \frac{(y_{i,j+1} - y_{i,j})}{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}}$$

分别连接四人各自对应时刻的对应点成一折线,并将它们画在同一图中即四人的行进轨迹。一个程序如下（这是用 Mathematica 软件编写的程序）

```
For[k=1,k≤12,k++,
  (t=k;dt=0.02;v=1;n=t/dt;
```

```
robit={{{0,10}},{{10,10}},{{10,0}},{{0,0}}};
For[j=1,j<=n,j++,
    For[i=1,i<=4,i++,
        xx1=robit[[i,j,1]];    yy1=robit[[i,j,2]];
        If[i!=4,xx2=robit[[i+1,j,1]];
        yy2=robit[[i+1,j,2]],
            xx2=robit[[1,j,1]];    yy2=robit[[1,j,2]]];
     dd=Sqrt[(xx2-xx1)^2+(yy2-yy1)^2]//N;
     xx1=xx1+v*dt*(xx2-xx1)/dd;    yy1=yy1+v*dt*(yy2-yy1)/dd;
     robit[[i]]=Append[robit[[i]],{xx1,yy1}]    ]];
g1=ListPlot[robit[[1]],PlotJoined->True,DisplayFunction->Identity];
g2=ListPlot[robit[[2]],PlotJoined->True,DisplayFunction->Identity];
g3=ListPlot[robit[[3]],PlotJoined->True,DisplayFunction->Identity];
g4=ListPlot[robit[[4]],PlotJoined->True,DisplayFunction->Identity];
g5=ListPlot[{{0,10},{10,10},{10,0},{0,0}},
        PlotJoined->True,DisplayFunction->Identity];
    Show[{g1,g2,g3,g4,g5},DisplayFunction->$DisplayFunction,
       AspectRatio→Automatic])]
```

运行后的结果为：



有兴趣的读者可以讨论 4 个人的速度有差异、多个人相互追逐、按不同的规律研究运动的追逐规律。

18.

利用 Malthus 模型和 Logistic 模型进行讨论，建立方程，确定参数，比较结果。下面给出了两种模型的预测结果，也可以选取其它模型。

Malthus 模型 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx,\ x(1800) = 5.308,$

通过一些年份的数据确定参数，解为

$x(t) = 5.308e^{0.026643(t-1800)}$

Logistic模型 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx(M-x),\ x(1800) = 5.308,$

通过一些年份的数据确定参数，解为

$$x(t) = \frac{998.546}{5.308 + 182.813e^{-0.031551(t-1800)}}$$

比较发现Logistic模型给出的结果较好