习 题 3.3

1.

（1）$y(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{3t}t$

（2） $y(t)=c_1e^{\frac{3t}{2}}+c_2e^{\frac{3t}{2}}t$

(3). $y(t)=c_1+c_2e^{7t}$

(4). $y(t)=c_1e^{-2t}\cos t+c_2e^{-2t}\sin t$

(5) $x(t)=c_1e^{\frac{3t}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}t}{2}+c_2e^{\frac{3t}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}t}{2}$

(6) $y(t)=c_1e^{t}+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}$

(7) $x(t)=(c_1+c_2t)e^{-t}+(c_3+c_4t+c_5t^2)e^{t}$

(8) $x(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{2t}+c_3e^{\sqrt{5}t}+c_4e^{-\sqrt{5}t}$

(9) $x(t)=(c_1+c_2t)e^{2t}\cos 2t-(c_3+c_4t)e^{2t}\sin 2t$

2.通解是 $y(t)=(c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^3)e^{4t}$ 方程是 $y^{(4)}-256y=0$

3. 通解是 $y(x)=c_1e^{-2x}+c_2\sin 3x+c_3\cos 3x$ 方程是 $y^{(3)}+2y''+9y'+18=0$

4. 1) $y(x)=\left(1+\frac{4x}{3}\right)e^{\frac{-x}{3}}$ 2） $y(x)=3xe^{\frac{-x}{2}}$

3） $y(t)=e^{2-t}$ 4） $y(t)=2(t-\pi)e^{\frac{2(t-\pi)}{3}}$

5. $y(x)=\frac{1}{3}(4e^{t}-e^{4t})$

6.

1） $y(x)=c_1x\cos(\ln|x|)+c_2x\sin(\ln|x|)$

2) y(x)=($c_1+c_2\ln|x+!|)\frac{1}{x+1}$

3) 令 $y=\frac{u}{x}$, 求解再代回后得 $y=c_1\frac{e^{x}}{x}+c_2\frac{e^{-x}}{x}$

4）解：令 $y=e^{x^2}z(x)$，则原方程化为 $z''(x)+z(x)=0$，其通 $z(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$，

最后得原方程的通解为 $y = c_1 e^{x^2}\cos x + c_2 e^{x^2}\sin x$。

7. 1） $x(t) = t(c_1 - ce^{-\frac{1}{t}})$

2） $x(t) = c_1\cot(t) + c_2(1 - t\cot(t))$

8. 证明：代入验证即可。

9. 通解是 $y(x) = c_1 x + c_2 e^x$

10. 提示：设 $x = e^{\lambda t}$，代入则有 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$，要使解有界，则 $\lambda \le 0$ 或 λ 为实部为负数的虚数。答案：p>0 且 q>=o 或 p=0 且 q>o。

11.

$L[t^r] = F(r)t^r,$

当 $F(r_1) = 0$时，$L[t^{r_1}] = 0$，x^{r_1}是解。

当 $F(r_1) = 0,\quad F'(r_1) = 0,\quad \ldots, F^{(k-1)}(r_1) = 0, F^{(k)}(r_1) \ne 0$，时，

$F(r) = (r - r_1)^k G(r),$

$G(r_1) \ne 0.$ 对 $j = 1, 2, \ldots, k-1,$

$L[t^{r_1}\ln(t)^j] = L\left[\left.\dfrac{d^j t^r}{dr^j}\right|_{r=r_1}\right] = \left.\dfrac{d^j L[t^r]}{dr^j}\right|_{r=r_1}$ =0， $t^{r_1}\ln(t)^j$是解。

12. 程序和结果如下

（1）

```
restart:
eq1:=diff(x(t),t$2)+diff(x(t),t)+x(t)=0;
dsolve(eq1,x(t));
```

$$eq1 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}x(t)\right) + x(t) = 0$$

$$x(t) = \_C1\, e^{(-1/2\, t)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\, t\right) + \_C2\, e^{(-1/2\, t)}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\, t\right)$$

（2）

```
eq1:=12*diff(x(t),t$2)-5*diff(x(t),t)-2*x(t)=0;
dsolve(eq1,x(t));
```

$$eq1 := 12\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t)\right) - 5\left(\frac{\partial}{\partial t}x(t)\right) - 2\,x(t) = 0$$

$$x(t) = \_C1\, e^{(2/3\, t)} + \_C2\, e^{(-1/4\, t)}$$

（3）

```
restart:
eq1:=diff(x(t),t$2)+6*diff(x(t),t)+13*x(t)=0;
dsolve([eq1,x(0)=1,D(x)(0)=1],x(t));
```

$$eq1 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{x}(t)\right) + 6\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t)\right) + 13\,\mathrm{x}(t) = 0$$

$$\mathrm{x}(t) = 2\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}\sin(2\,t) + \mathbf{e}^{(-3\,t)}\cos(2\,t)$$