答案 1

1.1）是，2）是，3）是，4）是

2. 把 $y = c^2 + cx + 2c + 1$ 带入得到

$$\frac{-(x+2)+\sqrt{x^2+4x+4y}}{2} = \frac{-(x+2)+\sqrt{(x+2(c+1))^2}}{2} = c = y'$$

因此 对任意常数 c $y = c^2 + cx + 2c + 1$ 是方程的解，区间为 $x \geq 2(c+1)$ 。

把 $y = \dfrac{-x(x+4)}{4}$ 带入方程中易得：$y = \dfrac{-x(x+4)}{4}$ 也是方程的解。

3.

（1） y=x^2， (2) y=e^{5x}， (3) y=$x^2/2$， (4) y=2，

(5) y=e^x， (6) $y = \sqrt{x}$ (7) y=$\sin x$， (8) y=e^x,

4. 代入验证即可，y=cx+c^2，

5. 将 y=0， $y = x^4/16$ 代入方程，易证是方程的解，此结果与存在唯一性不矛盾，因为在（0，0）点函数 $f(x,y) = x\sqrt{y}$ 不是 Lipschitz 连续的。

6. 证明：把 $y = \phi(x)$ 代入方程有，$\dfrac{d\phi(x)}{dx} = f(\phi(x))$，令 $x \to x + c$ 代入，则得证。区间是 $a - c < x < b - c$

7. 解：设 t 时刻该物体的速度是 v(t)，则物体的运动方程是 $\dfrac{dv}{dt} = -g, \quad v(0) = 20,$ 解为 $v(t) = 20 - gt$，到达最高点的时间是 $T = 20/g$ 秒，高度函数为 $h(t) = 1 + 20t - gt^2/2$，高度是 $H = 1 + 200/g$ 米。

8. （1）水面随时间降低，降低的速率在减小；

（2）$v(t) = \sqrt{2gh(t)}$

（3）设 t 时刻液面高度是 h(t)，由体积相等有 $-a^2\sqrt{2gh(t)} = R^2\dfrac{dh}{dt}, \quad h(0) = H,$

9. 没有变化

10. 解分别是：$y = \dfrac{1}{(2-\sin x)^3}$ 和 $y = \dfrac{1}{(\frac{1}{2}-\sin x)^3}$ 。

第一个解在任意区间均存在，第二个解在 $\dfrac{5\pi}{6} < x < 2\pi + \dfrac{\pi}{6}$ 存在。

对于 $y(\pi) = y_0$， 当 $0 < |y_0| < 1$ 时，区间为 $(-\infty, +\infty)$，

当 $y_0 \geq 1$ 时是 $(\pi - \arcsin y_0^{-1/3}, 2\pi + \arcsin y_0^{-1/3})$，

当 $y_0 \leq -1$ 时是 $(\arcsin y_0^{-1/3}, \pi - \arcsin y_0^{-1/3})$.。

11. 当 $y_0 \neq 1$ 且 $y_0 \neq 0$ 时，极限存在且为 1；y＝0 时，极限时 0。

12. 由定理 1.1 的证明过程知道 $\left|\phi_k(x) - \phi_{k-1}(x)\right| \leq \dfrac{ML^{k-1}}{k!}(x-x_0)^k$

$$\phi_n(x) = \phi_0(x) + \sum_{k=1}^{n}(\phi_k(x) - \phi_{k-1}(x)), \quad \phi(x) = \phi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(\phi_k(x) - \phi_{k-1}(x)),$$

$$\phi(x) - \phi_n(x) = \sum_{k=n+}^{\infty}(\phi_k(x) - \phi_{k-1}(x)),$$

$\left|\phi_n(x) - \phi(x)\right| \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{ML^{k-1}}{k!} |x - x_0|^k$，其中 M=max$\left|f(x,y)\right|$, L 是 Liapunov 常数

13 反证法

令 $u(x) = \psi(x) - \phi(x)$, 则 $u(x)$是下面初始值问题的解，

$\dfrac{du(x)}{dx} = f(x,\psi(x)) - f(x,\phi(x)), \quad u(x_0) = y_2 - y_1 > 0$。

反证，若有$x_1 \in (x_0, \beta)$使得 $u(x_1) \leq 0$, 由于$u(x_0) > 0$,

则必有$x_2 \in \left(x_0, x_1\right]$使得 $u(x_2) = 0$, 即$\psi(x_2) = \phi(x_2)$,

这与解的存在惟一性定理矛盾。

14. Picard 迭代函数是 $\phi_n(x) = \displaystyle\int_0^x [(s + 1 + \phi_{n-1}(s)]ds$， $\phi_0 = 0$，

$$\phi1 := \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$\phi2 := x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x$$

$$\phi3 := x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x$$

$$\phi4 := x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + x$$

$$\phi5 := x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + x$$

用归纳法验证一般形式，极限是 $y = 2e^x - 2 - x$

15. 证明：反证法，我们只证明 $x > x_0$ 的情况，小于的情况类似。

令 $h(x)=\psi(x)-\phi(x)$，则 $h(x_0)=0$，$h(x)$ 连续可导，由于 $f(x_0,y_0)<F(x_0,y_0)$

$h^{'}(x_0)>0$，故在 x_0 的一个邻域内必有 $h(x)>0$，若有一点 x_1，$x_1>x_0$，使得 $h(x_1)=0$，不妨假设 x_1 是使得 $h(x)=0$ 的最靠近的点，则 $\phi(x_1)=\psi(x_1)$，且 $h^{'}(x_1)\le 0$ $h^{'}(x_1)=F(x_1,\psi(x_1))-f(x_1,\phi(x_1))>0$，矛盾，所以当 $x>x_0$ 时 $h(x)$ 必然大于零。

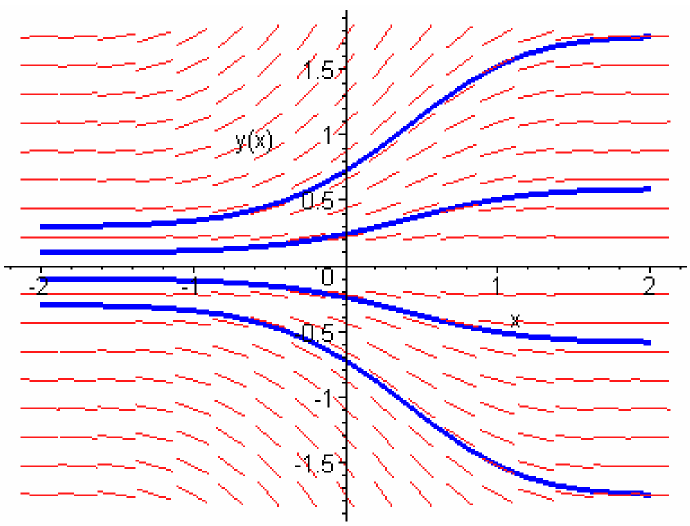
16.证明：若 x_0 是有限值，由于 $\phi(x)\to y_0,(x\to x_0)$ 且 $\phi^{'}(x)=f(x,\phi(x))$，在 $x=x_0$ 的邻域内连续有界，函数 $\psi(x)=\begin{cases}\phi(x), x\ne x_0\\ y_0,\end{cases}$ 就是一个可微函数。事实上，$\psi(x)$在$x\ne x_0$ 连续可微，当 $x=x_0$，$\psi^{'}(x_0)=\lim\dfrac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0}=\lim\dfrac{\psi(x)-y_0}{x-x_0}=\lim\phi^{'}(c)=f(x_0,y_0)$

因此$\psi(x)$是方程满足$\psi(x_0)=y_o$ 的解，有解的存在唯一性定理得：$\psi(x)=y_0$，即 $\phi(x)$ 是常数解，矛盾。

17.程序如下

1)

```
> restart:with(DEtools):
DEtools[phaseportrait]
([diff(y(x),x)=y(x)*exp(-x^2)],
y(x),x=-2..2,
[[y(-2)=0.1],[y(-2)=-0.1],
[y(-2)=0.3],[y(-2)=-0.3]],
dirgrid=[17,17],arrows=LINE,
linecolor=BLUE, axes=NORMAL);
```



这里只给第一题的程序，其他的类似（注意调节初始值）。

18．答案：$\left(x_0+\dfrac{1}{p(x_0)},\dfrac{q(x_0)}{p(x_0)}\right)$

19.证明：设该方程的积分曲线是 $y=\phi(x)$，则 $\phi^{'}(x)=x\tan x+1-\phi(x)\tan x$，当此曲线与 oy 轴相交时， $x=0,\phi^{'}(0)=1$，故所有的切线斜率均是 1，相互平行。交角为 45 度。

20.证明：若 $y=\phi(x)$ 有拐点 (x_1,y_1),则必有$y_1=\phi(x_1)$且$\phi''(x_1)=0$，因此得出

$$\phi^{'}(x_1)=f(x,\phi(x))$$

$$\phi^{''}(x)=f_x(x,\phi(x))+f_y(x,\phi(x))\phi'(x),$$

在拐点处， $\phi(x)^{'}=-\dfrac{f_x(x,\phi(x))}{f_y(x,\phi(x))}$

在等倾线上 $f(x,y)=c$，两边关于 x 求导，有 $y^{'}=-\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$，为等倾线斜率，

$\phi^{'}(x)$为积分曲线的斜率，由$\phi^{'}(x)=0$,即$\phi^{'}(x)=y^{'}$，故在拐点处积分曲线与等倾线相切。