答案 5.6

1.解：1) 令 $x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = 1 - r^2 \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -1 \end{cases} \qquad r = 1 \qquad \theta = \theta_0 - (t - t_0)$$

周期解 $r = 1$，即以(0,0)为心半径 1 的圆是极限环

当 $0 < r < 1$ 时，$\dfrac{dr}{dt} > 0$ 轨线按顺时针方向旋转且到原点的距离不断增加;

当 $r > 1$ 时，$\dfrac{dr}{dt} < 0$ 轨线按顺时针方向旋转且到原点的距离不断减少.

以(0,0)为心，半径为 1 的圆为稳定的极限环.

2) $\sin r = 0 \qquad r = 2k\pi \qquad r = (2k+1)\pi \quad k$ 为自然数

$2k\pi - \pi < r < 2k\pi$ 时，$\dfrac{dr}{dt} < 0$ 轨线按逆时针方向旋转且到原点的距离不断减小;

$2k\pi < r < 2k\pi + \pi$ 时，$\dfrac{dr}{dt} > 0$ 轨线按逆时针方向旋转且到原点的距离不断增加;.

$r = 2k\pi$ 为不稳定极限环

$2k\pi + \dfrac{\pi}{2} < r < 2k\pi$ 时，$\dfrac{dr}{dt} > 0$ 轨线按逆时针方向旋转且到原点的距离不断增加;

$2k\pi + \pi < r < 2k\pi + \dfrac{3}{2}\pi$ 时，$\dfrac{dr}{dt} < 0$ 轨线按时针方向旋转且到原点的距离不断减小;

$r = (2k+1)\pi$ 为稳定的极限环 （$k \in \bar{z}^-$）

3) $r = 0 \qquad \theta = \theta_0 - (t - t_0)$

$r = 2 \qquad \theta = \theta_0 - (t - t_0)$

$r = 3 \qquad \theta = \theta_0 - (t - t_0)$

$0 < r < 2$ 时，$\dfrac{dr}{dt} = r\left|2 - r\right|(r - 3) < 0$ 轨线按顺时针方向从 $r = R$ 走进圆内;

$2 < r < 3$ 时，$\dfrac{dr}{dt} = r\left|r - 2\right|(r - 3) < 0$ 轨线按顺时针方向从 $r = R$ 走进圆内;

$r > 3$ 时，$\dfrac{dr}{dt} > 0$ 轨线按顺时针方向从 $r = R$ 走出圆外.

即，r=2 为半稳定的极限环， $r = 3$ 为不稳定的极限环.

2.证明：$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=y\left(\cos\theta\frac{dr}{dt}-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)-x\left(\sin\theta\frac{dr}{dt}+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$=r\sin\theta\left(\cos\theta\frac{dr}{dt}-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)-r\cos\theta\left(\sin\theta\frac{dr}{dt}+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$=-r^2\frac{d\theta}{dt}$$

3.解：

1) 若有 R>0，使得 $f(R)=0$、且至少在 $r=R$ 的一侧邻域内 $f(r)\neq 0$ 时，系统有极限环 $r=R$

2）在 r=R 的邻域内

① 当 $r<R$ 时，$\frac{dr}{dt}=f(r)>0$，

当 $r>R$ 时，$\frac{dr}{dt}=f(r)<0$，则极限环是稳定的.

② 当 $r<R$ 时，$\frac{dr}{dt}=f(r)>0 \quad (<0)$

当 $r>R$ 时，$\frac{dr}{dt}=f(r)>0 \quad (<0)$ 极限环是半稳定的.

③ 当 $r<R$ 时，$\frac{dr}{dt}=f(r)<0$，当 $r>R$ 时，$\frac{dr}{dt}>0$，极限环是不稳定的.

3）$r(r-2)^2(r-1)(r-3)=0$

$0<r<1$ 时，$\frac{dr}{dt}>0$ 轨线沿逆时针方向从 $r=R$ 走出圆外;

$1<r<2$ 时，$\frac{dr}{dt}<0$ 轨线沿逆时针方向从 $r=R$ 走进圆内;

$2<r<3$ 时，$\frac{dr}{dt}<0$ 轨线沿逆时针方向从 $r=R$ 走进圆内;

$r>3$ 时，$\frac{dr}{dt}>0$ 轨线沿逆时针方向从 $r=R$ 走出圆外.

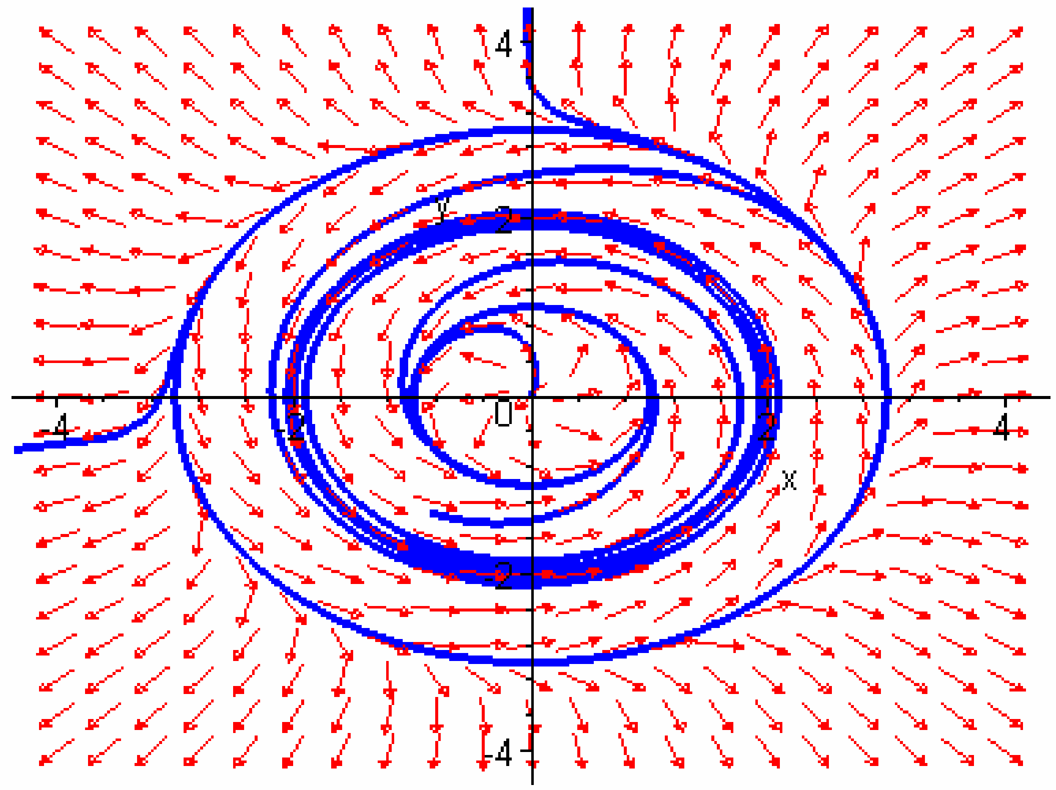
$r=1$ 稳定的极限环，$r=2$ 半稳定的极限环，$r=3$ 不稳定的极限环.

```
 restart:with(DEtools):  a:=1/2:
DE931:=[diff(x(t),t)=-y(t)+x(t)*(sqrt(x(t)^2+y(t)^2)-2)^2
*(x(t)^2
+y(t)^2-4*sqrt(x(t)^2+y(t)^2)+3),
diff(y(t),t)=x(t)+y(t)*(sqrt(x(t)^2+y(t)^2)-2)^2*(x(t)^2
+y(t)^2-4*sqrt(x(t)^2+y(t)^2)+3)];
DEplot(DE931,[x(t),y(t)], t=-10..10,
[[x(0)=0,y(0)=a],[x(0)=0,y(0)=2*a],
```

```
[x(0)=0,y(0)=3*a],[x(0)=0,y(0)=4*a],
[x(0)=0,y(0)=5*a],[x(0)=0,y(0)=6*a],
[x(0)=0,y(0)=7*a]],
x=-8*a..8*a,y=-8*a..8*a, stepsize=0.05,
dirgrid=[21,21], color=red,linecolor=blue,
arrows=SLIM);
```

$$DE931 := \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{x}(t) = -\mathrm{y}(t) + \mathrm{x}(t)\left(\sqrt{\mathrm{x}(t)^2 + \mathrm{y}(t)^2} - 2\right)^2 \left(\mathrm{x}(t)^2 + \mathrm{y}(t)^2 - 4\sqrt{\mathrm{x}(t)^2 + \mathrm{y}(t)^2} + 3\right), \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) + \mathrm{y}(t)\left(\sqrt{\mathrm{x}(t)^2 + \mathrm{y}(t)^2} - 2\right)^2 \left(\mathrm{x}(t)^2 + \mathrm{y}(t)^2 - 4\sqrt{\mathrm{x}(t)^2 + \mathrm{y}(t)^2} + 3\right) \right]$$



4.解： $r=1$ $\theta=\theta_0+(t-t_0)$

若 $a<-1$

① 当 $0<r<1$ 时，$\frac{dr}{dt}>0$，，轨线沿逆时针走出圆外

$r>1$ 时，$\frac{dr}{dt}<0$， 有稳定的极限环；

若 $a>0$

② $0 < r < 1$时，$\dfrac{dr}{dt} < 0$，$a > -\sin^2\theta$

$r > 1$时，$\dfrac{dr}{dt} > 0$　　有不稳定的极限环。

5.证明：1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} = 1 + 3x^2 + 2 + x^2 + y^2 = 4x^2 + y^2 + 2 > 0$

且 f, g 在任何区域内连续可微，$\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$ 在任何区域内不恒为 0，即

不存在闭轨线;

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} = -2 - y^2 + 1 - x^2 = -x^2 - y^2 - 1 < 0$

f, g 在任何区域内连续可微，$\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$ 在任何区域内不恒为 0,

不存在闭轨线;

3) f, g 在任何区域内连续可微

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = +4 + (x^2 + y^2) + 2x^2 + 1 + (x^2 + y^2) + 2y^2$$

$$= 4(x^2 + y^2) + 3 > 0$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$ 在任何区域不恒为 0，其不存在闭轨线.