答 案 3.2

1. $(a).0$ $(b).e^{rt}(r-1)(r-5)$ $(c).4\sin t-6\cos t$ $(d).5t^2-2t-10$

2. 证明：$L[cx(t)]=\int_0^t s^2cx(s)ds=c\int_0^t s^2x(s)ds=cL[x(t)]$。

$$L[x_1+x_2]=\int_0^t s^2(x_1+x_2)ds=\int_0^t s^2(x_1+x_2)ds=\int_0^t s^2x_1ds+\int_0^t s^2x_1ds=L[x_1]+L[x_2]$$

3. 证明：因为 $L[y(t)]=L[t-2t^2]=L(t)-2L[t^2]=2t^2+2-2t^2-2=0$

所以 $t-2t^2$ 是方程的解。

4. $a)$.设 $L[x]=t^2x^n-4tx'+6x=0,\quad L[\varphi_1(t)]=L[t^3]=6t^3-12t^3+6t^3=0$

在 $[0,+\infty]$ 上，$\varphi_2(t)=t^3$，显然 $L[\varphi_2(t)]=0$

在 $[+\infty,0]$ 上，$\varphi_2(t)=-t^3$，显然 $L[\varphi_2(t)]=-6t^3+12t^3-6t^3=0$

所以：φ_1 和 φ_2 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是方程的解。

$b)$.用反证法，假设存在恒等式 $c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)\equiv 0$，

当 $t\geq 0$ 时，$c_1t^3+c_2t^3=0$，$c_1=-c_2$

当 $t<0$ 时，$c_1t^3-c_2t^3=0$，$c_1=c_2$

而在[$(-\infty,+\infty)$ 时，$c_1t^3+c_2|t^3|=0$，只有 $c_1=0,c_2=0$，所以 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 线性无关，

又由（a），$\therefore \varphi_1$ 和 φ_2 是方程的基本解组。

$c)$.提示：分别讨论在 $t\geq 0$ 和 $t<0$ 时 $W[\varphi_1(t),\varphi_2(t)]$，可得出结果。

d).不矛盾。 因为该方程化为（3.2.4）的形式后其系数不连续，不满足定理 3.4 的条件。

5．解：因为 ψ_1 ，ψ_2 是方程的基本解组有 $\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \psi_1' & \psi_2'\end{vmatrix}=\psi_1\psi_2'-\psi_1'\psi_2\neq 0$

而 $\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \psi_1' & \psi_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_{11}\varphi_1+c_{12}\varphi_2 & c_{21}\varphi_1+c_{22}\varphi_2\\ c_{11}\varphi_1'+c_{12}\varphi_2' & c_{21}\varphi_1'+c_{22}\varphi_2'\end{vmatrix}=(c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21})(\varphi_2'\varphi_1-\varphi_1'\varphi_2)$

$\because \psi_1\psi_2'-\psi_1'\psi_2\neq 0 \qquad \therefore \quad c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}\neq 0$

即 $\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}\neq 0$ 时，ψ_1 ψ_2 也是方程的基本解组。

6．证明：将 $x(t)=t^2$ 代入方程得 $p(t)=-\frac{q(t)t^2+2}{2t}=-\frac{q(t)}{2}t-\frac{1}{t}$

显然 $p(t)$ 在 $t=0$ 处不连续与已知矛盾

$\therefore x(t)=t^2$ 不是方程的解。

7．证明：设 $x(t), y(t)$ 是两个线性无关的解，则代入 Wronskian 行列式中，代入可得：

$W(t)=\exp(-\int p(t)dt)$,$W'(t)=-p(t)\exp(-\int p(t)dt)$.由题意知道，$p(t)>0$或$p(t)<0$.

所以在 I 上$W'(t)<0$或$W'(t)>0$,从而$W(t)$ 是 I 上的严格单调函数。

8. 解： $x=x_1[c_1+c\int\frac{1}{x^2}\exp(\int\frac{t}{t-1})dt)dt]$

$=t\ [c_1+c\int\frac{1}{t^2}\exp(\int\frac{t}{t-1})dt)dt]$

$=c_1t+ct\int\frac{t-1}{t^2}e^t dt$

9. 解： $x=\ln t[c_1+c\int\frac{1}{(\ln t)^2}\exp(\int\frac{\frac{1}{t}}{\ln t-1}dt)dt]$

$=\ln t[c_1+c\int\frac{\ln t-1}{(\ln t)^2}dt]=c_1\ln t+c\ln t\int\frac{\ln t-1}{(\ln t)^2}dt$

10. 验证（略），通解是： $x(t)=C_1t+C_2e^t-t^2-1$

11. 解：通解是： $x(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t-(\frac{t^2}{8}-\frac{1}{64})\cos 2t+\frac{t}{16}\sin 2t$

12．证明：拐点是指在这点 $y''=0$，对于本题我们用反证法。假设同时为拐点，即

$p(x)y_1'+q(x)y_1=0, p(x)y_2'+q(x)y_2=0$， 由于 $p(x)$和$q(x)$ 的行列式 $|A|\neq 0$， 所以

$p(x)$和$q(x)$ 必须为 0，这与 $p(t)$ 和 $q(t)$ 不同时为零矛盾，假设不成立。即 $y_1(x), y_2(x)$ 不能同时是方程的拐点。

13．提示：做辅助函数 $f(x)=\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$，利用 Wronskian 行列式的性质和 Rolle 微分中值定理反证，导出矛盾。

设 $y_1(x_1)=0,\quad y_1(x_2)=0,$ 且当 $x\in[x_1,x_2]$时，$y_2(x)\neq 0,$则$f(x)=\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$

满足*Rolle*微分中值定理的条件，则有 $x_0\in$（x_1,x_2），使得 $f\,'(x_0)=0,$

$$f\,'(x_0)=\left.\frac{y_1\,'(x)y_2(x)-y_2\,'(x)y_1(x)}{y_2(x)^2}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{W[y_1(x),y_2(x)]}{y_2(x)^2}\right|_{x=x_0}=0,\quad \text{矛盾。}$$

14.

$$W[x_1(t),x_2(t)]=x_1(t)x_2^{'}(t)-x_2(t)x_2^{'}(t)=W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}-\frac{p\,'(t)}{p(t)}dt\right)=W(t_0)\frac{p(t_0)}{p(t)}$$

15.

注意到 $x_k(t)-x_{n+1}(t)\ \ (k=1,2,\dots,n)$ 是齐次方程的解，类似于线性方程通解的证明过程。