习题 3.5 答案

**1.** 解：由题意列出方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\dfrac{kx}{m},\quad x(0)=A,\quad x'(0)=0,\quad k=\dfrac{mg}{a}$，

解得 $x(t)=c_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$

由初始条件得 $x(t)=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{a}}t\right)$

**2.** 解：

方程为 $m\dfrac{d^2s}{dt^2}=F-a-b\dfrac{ds}{dt},\quad s(0)=0,\quad s'(0)=0,$

通解为 $s(t)=c_1+c_2\exp\left(-\dfrac{bt}{m}\right)+\dfrac{F-a}{b}t$

代入初始条件后得 $s(t)=\dfrac{m(F-a)}{b^2}\left(\exp\left(-\dfrac{bt}{m}\right)-1\right)+\dfrac{F-a}{b}t$

.

**3.** 解：

取该物体在水中平衡时的位置为坐标原点，$x$坐标轴正向朝上，当物体离开原平衡位置$x$时，它所受到的力为$x$.

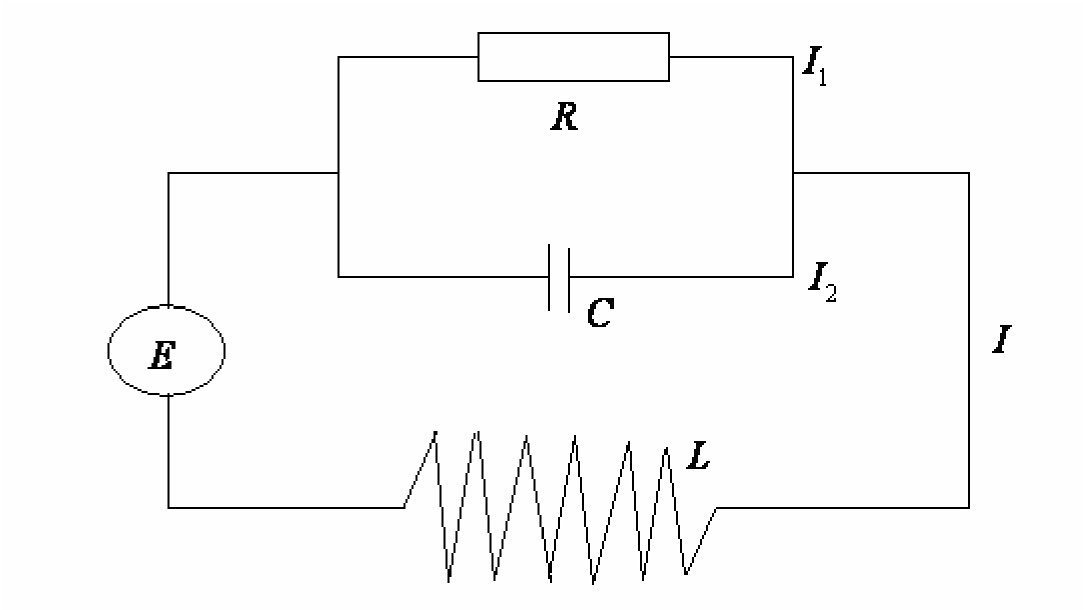
方程为 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=F=-1000gx,\quad x(0)=a,\quad x'(0)=0,$

通解为 $x(t)=c_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{1000g}{m}}t\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\dfrac{1000g}{m}}t\right)$

代入初始条件后得 $x(t)=a\cos\left(\sqrt{\dfrac{1000g}{m}}t\right)$，其周期为 T=$\dfrac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{1000g}}$,

质量为 $m=\dfrac{1000g}{16\pi^2}\approx 62kg$

**4．** 电路示意图如下




根据题目中电路的示意图电学中的相关定理得到

$$RI_1+L\frac{dI}{dt}=E,\quad \frac{Q}{C}+L\frac{dI}{dt}=E,\quad I=I_1+I_2,\quad \frac{Q}{C}=RI_1,$$

整理后得到 $\frac{I_2}{C}+L\frac{d^2I}{dt^2}=0,\quad I_1=I+CL\frac{d^2I}{dt^2},$

$$RCL\frac{d^2I}{dt^2}+L\frac{dI}{dt}+RI=E,\quad I(0)=0,\quad I'(0)=0,$$

通解为 $I(t)=c_1\exp\left(\frac{-L+\sqrt{L^2-4R^2LC}}{2RLC}t\right)+c_2\exp\left(\frac{-L-\sqrt{L^2-4R^2LC}}{2RLC}t\right)+\frac{E}{R}$

其中 $c_1=\frac{E\left(-L-\sqrt{L^2-4R^2LC}\right)}{2R\sqrt{L^2-4R^2LC}},\quad c_2=\frac{E\left(L+\sqrt{L^2-4R^2LC}\right)}{2R\sqrt{L^2-4R^2LC}}-\frac{E}{R}$

**5.**

因为 $\cos^3\omega t=\frac{\cos 3\omega t+3\cos\omega t}{4}$

原方程可以化为 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\frac{A}{m}\frac{\cos 3\omega t+3\cos\omega t}{4},\quad \omega_0^2=\frac{k}{m}.$

当 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 或 $\omega=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$ 时出现共振

**6.** 右边展开，看成由 m 个 Fi 合成的强迫振动。

1）设 $T_1$ 是最小周期，则 $\cos\frac{2n\pi(t+T_1)}{T}=\cos\frac{2n\pi t}{T}$,即 T＝$T_1$

2）当共振的时候 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$，把 T 代入，则可看出此时满足共振条件，产生共振。

7.

设$t$时刻物体的位置为$x(t)$,未运动前物体的位置为$x=0$,弹簧的伸长与物体的重力平衡，当物体位于$x(t)$时，弹簧除过重力外对物体的拉力为$kx(t)$,该力将引起滑轮的转动和物体的运动，由转动定律（M=I$\beta$,其中，M为力矩，I为转动惯量，$\beta$为角加速度）和运动定律得

$$\left(m+\frac{I}{R^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2}=-kx,\quad x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=0,$$

求解得通解为 $x(t)=c_1\cos\sqrt{\frac{kR^2}{mR^2+I}}t+c_2\sin\sqrt{\frac{kR^2}{mR^2+I}}t$

代入初始条件后得：$x(t)=x_0\cos\sqrt{\frac{kR^2}{mR^2+I}}t$