答 案 4.1

1. $$\begin{cases} L\dfrac{di_1(t)}{dt}+Ri_2(t)=E(t), & i_1(0)=0, \\ RC\dfrac{di_2(t)}{dt}+i_2(t)-i(t)_1=0, & i_2(0)=0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt}=\dfrac{x_2(t)}{50}-\dfrac{x_1(t)}{50}, & x_1(0)=5, \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=\dfrac{x_1(t)}{50}-\dfrac{x_2(t)}{50}, & x_2(0)=10. \end{cases}$$

3. (1) 是线性的 (2) 是非线性的 (3) 是非线性的

4. 矩阵形式为：$x^{'}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$

5. $x^{'}(t)=\begin{bmatrix} x_1^{'}(t) \\ x_2^{'}(t) \\ x_3^{'}(t) \\ x_4^{'}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(te^t)^2 & e^t & 0 \end{bmatrix}x(t)+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$， 初值为 $x(1)=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$。

6. 代入验证即可（略）。

7. (1) 解：令 $x_1(t)=x, x_2(t)=x', y_1(t)=y$

则对应的一阶微分方程组为：

$$\begin{cases} y_1^{'}(t)=x_2(t)+2y_1(t) \\ x_1^{'}(t)=x_2(t) \\ x_2^{'}(t)=-2x_2(t)-5y_1(t)+3 \end{cases}$$

初始条件: $x_1(0)=0, x_2(0)=0, y_1(0)=1$

(2) 解：令 $x_1(t)=x, x_2(t)=x', y_1(t)=y, y_2(t)=y'$

则对应的方程组为：

$$\begin{cases} x_1^{'}(t)=x_2(t) \\ y_1^{'}(t)=y_2(t) \\ x_2^{'}(t)=7x_1(x)-6y_1(t)-5y_2(t)+e^t \\ y_2^{'}(t)=15x_1(t)+2y_1(t)-3y_2(t)+\cos t \end{cases}$$

初始条件为: $x_1(0)=1, x_2(0)=1, y_1(0)=0, y_2(0)=1$

(3) 解：令 $x_1(t)=x, x_2(t)=x', x_3(t)=x'', y_1(t)=y, y_2(t)=y'$

则对应的方程组为：

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ x_3'(t) = tx_3(t) + x_1(t) - y_2(t) + t + 1 \\ y_2'(t) = (\sin t)x_2(t) + x_1(t) - y_1(t) + t^2 \\ y_1'(t) = y_2(t) \end{cases}$$

初始条件为：$x_1(1) = 2, x_2(1) = 3, x_3(1) = 4, y_1(1) = 5, y_2(1) = 6$

8．解**:**设

$$x_0(t) = x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t \left[A(s)x_0 \right] ds$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

令 $x_2(t) = x_0 + \int_0^t \left[A(s)x_1 \right] ds$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} t \\ -\frac{t^2}{2} + 1 \end{bmatrix}$$

令 $x_3(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ -\frac{t^2}{2} + 1 \end{bmatrix} dt$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} + 1 \\ -t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} t - \frac{t^3}{6} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

∴ 方程组的第三次近似解为:

$$x_3(t) = \begin{bmatrix} t - \frac{t^3}{6} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$