习题答案 2.2.

1.

(1) $(1+x^2)(1+y^2)=cx^2$，

(2) $x-y+\ln|xy|=c, y=0$

(3) $\sin y\cos x=c, y=k\pi, k=0,\pm1,.......$

4） $2e^{3x}-3e^{-y^2}=c$

(5) $1+\ln\frac{y}{x}=cy$，

(6) $\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{x^3}{9}-\frac{y^2}{2}-2y-\ln y+c=0$

(7) $2\cos y=x+\frac{\sin 2x}{2}+c$，

(8) $-\cos x+\frac{e^y}{2}+\frac{ye^{-y}}{2}+\frac{e^{-y}}{2}+c=0$

(9) $y^2-x-x^2+c=0$，

(10) $x-y-5\ln\frac{x+4}{y+3}+c=0$

(11) $\cot(y)-\cos(x)=c$，

(12) $2\sin x+\cot(y)+c=0$

(13) $y=\frac{-1}{c+\arctan e^x}$，

(14) $\arctan\frac{y}{x}-\ln x+c=0$，

(15) $e^{\frac{y}{x}}-\ln x+c=0$

(16） 令分母，分子分别等于零，解出交点(x_0,y_0),代回原方程，再令 Y=Xu，求导代入即可化成变量可分离的方程

(1,-2), $3\ln(x+y+1)-\ln(y-x+3)+c=0$

(17) (-2,3), $3\ln(y-x-5)+\ln(y+x-1)+c=0$

(18） (2,1), $\ln(x+y-3)+\frac{2(x-2)}{x+y-3}+c=0$

(19） (-1,-3), $4\ln(2x+y+5)+\ln(y-3x)+c=0$

2.

(1) $y=2+\frac{1}{3}\sqrt{6x^3+27x^2+36x-33}$,

(2) $y=\dfrac{1}{2e^{\frac{x^2}{2}-2}-1}$,

(3) $x^2+\sin x+y^3+2y^2-3=0$

(4) $\arctan 2y=-\arctan x^2+\frac{\pi}{4}$

(5) $\ln|xy|+\frac{1}{x}+1=0$

3. 仿照例题2.2.8

1）

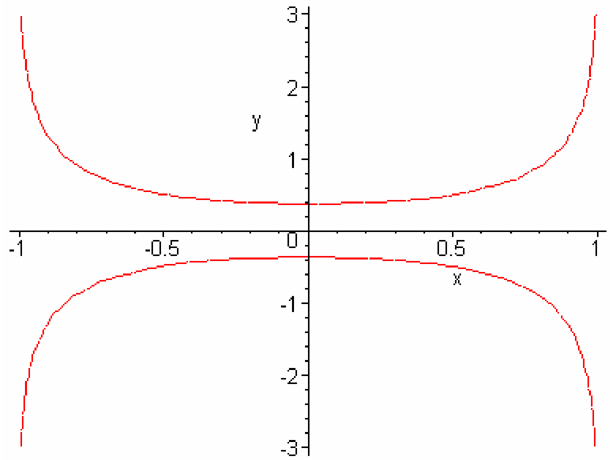
```
> restart: with(DEtools):with(plots):
ode1:=diff(y(x),x)=2*x*y(x)*(1+y(x)^2);
odeadvisor(ode1);
dsolve(ode1,y(x),implicit);
tp:=subs([y(x)=y,_C1=8],lhs(%));
implicitplot(tp,x=-1..1,y=-3..3);
```

$$ode1 := \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)=2\,x\,\mathrm{y}(x)\,(1+\mathrm{y}(x)^2)$$

$$[\_separable]$$

$$\frac{1}{\mathrm{y}(x)^2}+1-\mathbf{e}^{(-2\,x^2)}\,\_C1=0$$

$$tp := \frac{1}{y^2}+1-8\,\mathbf{e}^{(-2\,x^2)}$$



2）

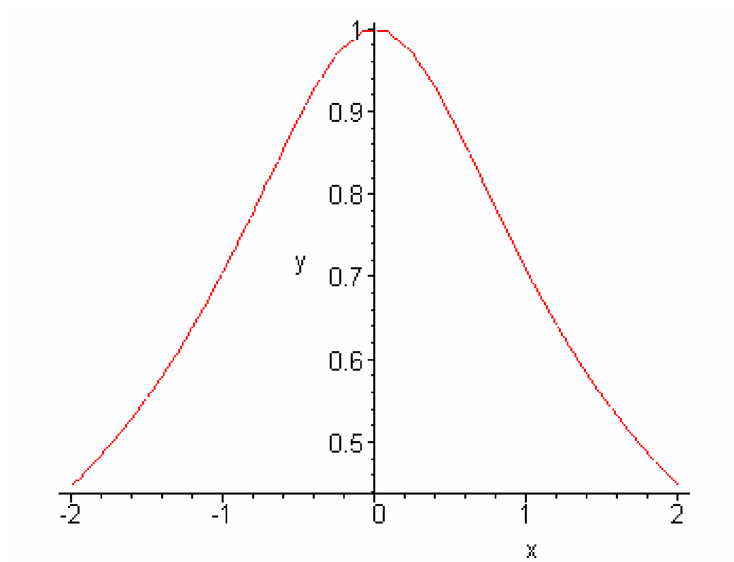
```
> restart: with(DEtools):with(plots):
ode2:=(1+x^2)*diff(y(x),x)+x*y(x)=0;
odeadvisor(ode2);
dsolve(ode2,y(x),implicit);
tp:=subs([y(x)=y,_C1=1],%);
implicitplot(tp,x=-2..2,y=0..2);
```

$$ode2 := (1+x^2)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)+x\,\mathrm{y}(x)=0$$

$$[\_separable]$$

$$\mathrm{y}(x)=\frac{\_C1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$tp := y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$



3)

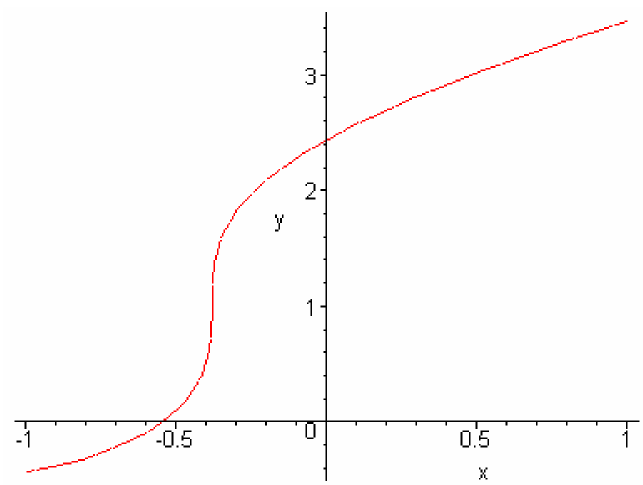
```
> restart: with(DEtools):with(plots):
ode3:=(y(x)-1)^2*diff(y(x),x)=2*x+3;
odeadvisor(ode3);
dsolve(ode3,y(x),implicit);
tp:=subs([y(x)=y,_C1=1],%);
implicitplot(tp,x=-1..1,y=-2..4);
```

$$ode3 := (\mathrm{y}(x)-1)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right) = 2\,x+3$$

$$[\_separable]$$

$$x^2+3\,x-\frac{1}{3}(\mathrm{y}(x)-1)^3+\_C1=0$$

$$tp := x^2+3\,x-\frac{1}{3}(y-1)^3+1=0$$



4)

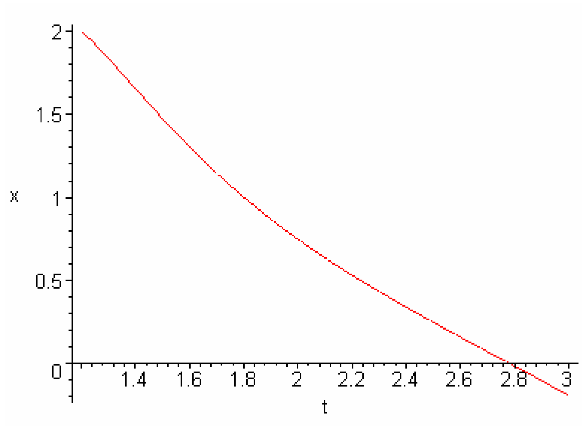
```
> restart: with(DEtools):with(plots):
ode4:=t^2*diff(x(t),t)= x(t)^2-t^2+1-t^2*x(t)^2;
odeadvisor(ode4);
dsolve(ode4,x(t));
tp:=subs([x(t)=x,_C1=0],%);
implicitplot(tp,t=1..3,x=-10..2);
```

$$ode4 := t^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right) = \mathrm{x}(t)^2-t^2+1-t^2\,\mathrm{x}(t)^2$$

$$[\_separable]$$

$$x(t) = -\tan\left(\frac{t^2 + 1 + \_C1\ t}{t}\right)$$

$$tp := x = -\tan\left(\frac{t^2 + 1}{t}\right)$$



5）

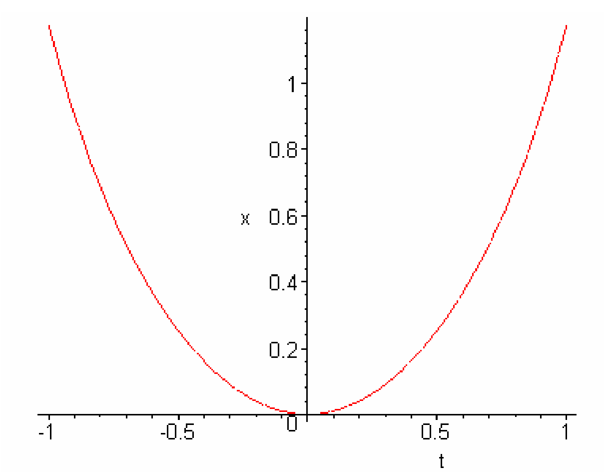
```
> restart: with(DEtools):with(plots):
ode5:= diff(x(t),t)= 2*t*(1+x(t)^2)^(1/2);
odeadvisor(ode5);
dsolve(ode5,x(t));
tp:=subs([x(t)=x,_C1=0],%);
implicitplot(tp,t=-1..1,x=-1..2);
```

$$ode5 := \frac{\partial}{\partial t}\,x(t) = 2\,t\,\sqrt{1 + x(t)^2}$$

$$[\_separable]$$

$$x(t) = \sinh(t^2 + 2\,\_C1)$$

$$tp := x = \sinh(t^2)$$



4. 证明 变换后方程的形式是 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u(1+f(u))}{x}$， 由此可求得方程解。

(1) $x^2+y^2(c-x^4/2)=0$，

（2） $\ln\left|\dfrac{y}{x^2}\right|=\dfrac{1}{2}x^2y^2+c$

5. $f(x)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

6.

首先推导 $f(0)=0$， 再得到微分方程。

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}-f(x)}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(1+f(x)^2)f(y)}{y(1-f(x)f(y))}=(1+f(x)^2)f'(0),$$

解方程得 $f(t)=\tan[f^{'}(0)x]$

7.

当y_0=0时，显然有 $y\equiv 0$是解，其存在区间为$(-\infty,+\infty)$，

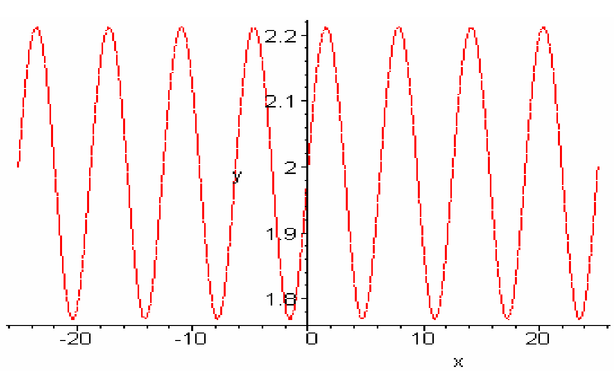
当$y_0\neq 0$ 时利用分离变量法得到解为

$y^2+\ln y-\sin x=y_0^2+\ln|y_0|$. 注意到右端函数的有界性，

利用解的存在惟一性定理就可以得到存在区间为$(-\infty,+\infty)$。

当y(0)=2时，利用Maple可以画出解曲线的图形为

```
> restart: :with(plots):
implicitplot(y^2+ln(y)-sin(x)-4-ln(2)=0,
x=-8*Pi..8*Pi,y=0..3,grid=[150,150]);
```



8. 证明： 方程解是 $y=\dfrac{\varepsilon}{(\dfrac{\varepsilon}{y_0}-\sigma)e^{-\varepsilon x}+\sigma}$ 当 $y_0\neq 0,\quad y_0\neq\dfrac{\varepsilon}{\sigma}$ 时,

$y=0,\quad y=\dfrac{\varepsilon}{\sigma}$ 也是解。

（1） 当 $y_0>0$，极限是 $\dfrac{\varepsilon}{\sigma}$，当 $y=\dfrac{\varepsilon}{\sigma}$ 时，是显然成立的

（2） 当 $y_0=0$，由解的唯一性知 y=0, 极限是“0”

（3） 当 $y_0<0$, 满足条件的 x_0 是 $x_0=\dfrac{1}{\varepsilon}\ln(1-\dfrac{\varepsilon}{\sigma y_0})$

9. 解：设任一时刻B点的坐标是 (x,y)，A点的坐标是 $(X,0)$，则由题意知：$(X-x)^2+y^2=b^2$，

且 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{X-x}$，经过点 $(0,b)$。联立有：$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{\sqrt{b^2-y^2}}$，解得

$$x+\sqrt{b^2-\mathrm{y}(x)^2}-b\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-\mathrm{y}(x)^2}}{\mathrm{y}(x)}\right)=0$$

10．方程为 $y'=-y/x,\quad y(1)=2$ 解为 $xy=2$

11． 1）8倍，2）1250个

12．提示：温度变化率与温差成正比。23点视为零时刻，则方程为 $C=28+2.8e^{-0.934t}$，而人正常体温是36.5左右，代入可得 $t=-1.2$，因此说明受害者的死亡时间是在21：48左右。

13．假设一天服药n次，时间间隔为T，则在

$0\le t<T$ 方程是 $x(t)=ae^{-kt}$

$T\le t<2T$ 方程是 $x(t)=(a+ae^{-kT})e^{-k(t=T)}$

。。。。。。

$nT\le t<(n+1)T$ 方程是 $x(t)=(a+ae^{-kT}+\ldots+a^{-nkT})e^{-k(t=nT)}$

上面的当 $n\to\infty$，可以求出 $a+ae^{-kT}+\ldots+a^{-nkT}$ 的极限是 $\dfrac{a}{1-e^{-kT}}$。

因此在等间隔服药的过程中，药的浓度在人体中呈上升趋势，最后稳定在一定的水平。

其中 a 是浓度的最大值