答 案 4.3

1．证明：(1) 设存在c_1,c_2,使得:$c_1x_1+c_2x_2=0$，即：

$$c_1\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}t^2\\t\end{pmatrix}=0,\quad c_1t+c_2t^2=0,\quad c_1+c_2t=0\text{不可能对所有}t\text{成立}.$$

x_1与x_2在R上是线性无关的.

(2) 直接计算得 $W\left[x_1,x_2\right]=\begin{vmatrix}t & t^2\\1 & t\end{vmatrix}\equiv 0$

(3) (1)与(2)这两种情况能同时发生,因为他们不是一个微分方程组的解向量.

2．证明:设存在c_1,c_2,且c_1,c_2不全为零使得:$\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\\psi_1(t)\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}\varphi_2(t)\\\psi_2(t)\end{pmatrix}$.线性相关.

$$c_1\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\\psi_1(t)\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\varphi_2(t)\\\psi_2(t)\end{pmatrix}=0.\quad c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)=0,\quad \varphi_1(t)=k\varphi_2(t),\quad \varphi_2(t)=k\varphi_2(t),$$

$\varphi_1(t)$与$\varphi_2(t)$线性无关，矛盾。这两个向量在任何区间I上都线性无关.

3．带入验证是显然成立的（略）

4．$a_{11}(x)=0$，$a_{12}(x)=1$，$a_{21}(x)=-1$，$a_{22}(x)=0$.

5．提示：原式等价于$\Phi(t)=\Phi(t-t_0)\Phi(t_0)$

$\Phi(t)$和$\Phi(t-t_0)\Phi(t_0)$每一列都是方程组的解，当$t=t_0$时利用条件$\Phi(0)$=E得$\Phi(t)$和$\Phi(t-t_0)\Phi(t_0)$得值相等，由解的存在惟一性即可得到对所有t，$\Phi(t)$和$\Phi(t-t_0)\Phi(t_0)$相等

6．该微分方程组为:$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0 & -1\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

7.（1）验证略

(2) $$\vec{x}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{25}(27-15t)e^{2t}-\dfrac{14}{25}\sin t-\dfrac{2}{25}\cos t\\[2mm] -\dfrac{3}{5}e^{2t}-\dfrac{2}{5}\cos t+\dfrac{1}{5}\sin t\end{cases}$$

8．$$\vec{x}(t)=\begin{cases}e^{2t}-te^{2t}+\dfrac{1}{2}t^2e^{2t}\\[2mm] -e^{2t}+te^{2t}\end{cases}$$

9．提示

反证，若方程的一切解在$[t_0,+\infty)$有界，由 Liouville公式

$W(t)=W(t_0)\int_{t_0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t)dt$ 也应该在$[t_0,+\infty)$有界，矛盾。