答案 5.5

1.

(1)　变号函数

(2）半定正函数

(3）定正（当 $x^2+y^2<\pi$ ）

(4）定正

(5）变号

(6）常正

2.解:　1) $V(x,y)=x^2+y^2$

$$\frac{dV(x,y)}{dt}=-2(x^4+x^2y^2+y^4)\le 0$$

零解渐近稳定.

2)　$V(x,y)=x^2+2y^2$

$$\therefore\quad \frac{dV}{dt}=2x(-\frac{1}{2}x^3+2xy^2)+4y(-y^3)$$

$$=-(x^2-2y^2)^2\le 0$$

零解稳定.

3)　$V(x,y)=x^2+2y^2$

$$\frac{dV}{dt}=2x(x^3-2y^2)+4y(xy+x^2y+\frac{1}{2}y^3)$$

$$=2(x^2+y^2)^2$$

零解不稳定.

4)　$V(x,y)=x^2+y^2$

$$\frac{dV}{dt}=2x(-x^3+2y^2)+2y(-2xy^2)$$

$$=-2x^4<0$$

零解稳定.

3 .证明: 将函数在原点展开，设 $V(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+o(\rho^2)$　定正,

$((a\ge 0,b^2<ac,\rho=\sqrt{x^2+y^2})$，不失一般性，设　$a>0,b=0,c>0$，

对充分小的正数 h,考虑$V(x,y)=ax^2+cy^2+o(\rho^2)=h$的图形。

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,则对固定的$\theta\in[0，2\pi]$,

$V(x,y)=V(\rho)=\rho^2(a\cos^2\theta+c\sin^2\theta+o(1))=h.$

$V(0)=0<h$, 当ρ较大时，必有$V(\rho)>h$,所以有$\rho(\theta)$,使得

$V(\rho(\theta))=h.$ 又因为$\dfrac{\mathrm{d}V(\rho)}{\mathrm{d}\rho}=2\rho(a\cos^2\theta+c\sin^2\theta)+o(\rho)>0,$

所以，$\rho(\theta)$惟一，又因为，$V(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$是$\theta$的周期函数，

所以，$V(x,y)=h$是闭曲线。

4.解: $\dfrac{dV}{dt}=x(y-xf(x,y))+y(-x-yf(x,y))$

$=-(x^2+y^2)f(x,y)$

① 若 $f(x,y)|_{(0,0)}>0$ ， 渐近稳定

② 若 $f(x,y)|_{(0,0)}<0$ ， 不稳定

③ 若 $f(x,y)=0$，则无法确定

5.

解：1）$V(x,y)=2x^2+y^2$ 可判断是：渐近稳定.

2）$V(x,y)=x^2+y^2$

带入验证知 渐近稳定

3）$V(x,y)=2x^2+y^2$ 定正

$\alpha<0$ 渐近稳定

$\alpha=0$ 稳定

$\alpha>0$ 不稳定

4) $V(x,y)=x^2+y^2$，渐近稳定

5) 令 $V(x,y)=xy$, $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(5)}=y(x+y+xy^2)+x(2x-y-y^3)=2x^2+y^2$

V 变号，全导数正定，不稳定

6) $V(x)=x^2+2y^2+z^2$

渐近稳定

6. 解: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -g(x,y) - f(x) \end{cases}$

设$V(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + \int_0^x f(s)ds$

$\dfrac{dV}{dt}$ = -yg(x,y) ≤ 0

零解是稳定的

7.证明: 1) $V(x^*, y^*) = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = c_1(1 - \frac{x^*}{x}), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = c_2(1 - \frac{y^*}{y}), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{c_1 x^*}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{c_2 y^*}{y^2}$$

$V(x,y)$ 在正奇点取得最小值 0， $V(x,y)$ 为 R_+^2 内部的正定函数.。

(2) 证明：选取适当的c_1， c_2,代入验证即可（略）

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= c_1(x - x^*)(r_1 - a_{11}x - a_{12}y) + c_2(y - y^*)(r_2 - a_{21}x - a_{22}y) \\
&= c_1(x - x^*)[-a_{11}(x - x^*) - a_{12}(y - y^*)] + c_2(y - y^*)[-a_{21}(x - x^*) - a_{22}(y - y^*)] \\
&= -c_1 a_{11}(x - x^*)^2 - (c_1 a_{12} + c_2 a_{21})(x - x^*)(y - y^*) - c_2 a_{22}(y - y^*)^2
\end{aligned}$$

由关于$(x - x^*)$的二次函数的判别式

$$\begin{aligned}
\Delta &= (c_1 a_{12} + c_2 a_{21})^2 (y - y^*)^2 - 4 a_{11} c_1 c_2 a_{22} (y - y^*)^2 \\
&= (y - y^*)^2 \left[(c_1 a_{12} + c_2 a_{21})^2 - 4 c_1 a_{11} c_2 a_{22} \right] < 0 \text{确定出} c_1 \text{和} c_2
\end{aligned}$$

8.证明: $V(x,y) = x^2 + y^2$ 正定的

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= 2x(2y - x) + 2y(-2x - y + 2x^2 y^2 + 2x^4) \\
&= 4xy - 2x^2 - 4xy - 2y^2 + 4x^2 y^3 + 4x^4 y \\
&= -2x^2 - 2y^2 + 4x^2 y(y^2 + x^2) = (x^2 + y^2)(4x^2 y - 2)
\end{aligned}$$

当 $4x^2 y - 2 < 0$，即局部范围内考虑，（0，0）是渐近稳定的

9.证明: 构造$V(x,y) = \dfrac{1}{2} y^2 + k(1 - \cos x)$ 定正的

$$\frac{dV}{dt} = k\sin x(y) + y(-k\sin x - \beta y) = -\beta y^2$$

$\beta > 0 \qquad \therefore \quad \frac{dV}{dt} < 0$

$\therefore$ (0,0)渐近稳定.