答 案 3.4

1.

(1) $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}-3+2x-2x^2$

(2) $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{4}e^{3x}$

(3) $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{20}\cos(2x)-\frac{3}{20}\sin(2x)$

(4) $y(t)=c_1e^{3t}\cos 4t+c_2e^{3t}\sin 4t+\frac{56}{663}\sin\frac{1}{2}t-\frac{20}{663}\cos\frac{1}{2}t$

(5) $y(t)=c_1e^{3t}\cos 4t+c_2e^{3t}\sin 4t+2e^{-t}$

(6) $y(t)=c_1e^{3t}\cos 4t+c_2e^{3t}\sin 4t+\frac{16}{5}-3t+2t^3$

2.

$y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}-\frac{13}{144}e^{-x}-\frac{1}{12}xe^{-x}$

3. $y(x)=c_1+c_2e^{x}-19x-10x^2-3x^3$

4. $y(x)=ce^{5x}-\frac{3}{13}x\cos x-\frac{69}{338}\cos x-\frac{2}{13}x\sin x+\frac{71}{338}\sin x$

5. $y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x+c_3x\sin x+c_4x\cos x+\frac{1}{8}\cos 3x+2\sin 2x$

6. 特解形式为 $t^2e^{x}(ax^2+bx+c)+dx+f$

$x(t)=\frac{5}{24}t^4\mathrm{e}^t+\frac{3}{8}\mathrm{e}^t t^2+3t+3-\frac{5}{12}t^3\mathrm{e}^t-\frac{3}{8}\mathrm{e}^t t+\frac{3}{16}\mathrm{e}^t+\_C1\,\mathrm{e}^t+\_C2\,\mathrm{e}^{(-t)}+\_C3\,\mathrm{e}^t t$

7. 方程的通解是 $y(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}+e^{x}+\frac{1}{4}$

8.

(1) $y(x)=c_1x^3+c_2x^2+\frac{1}{2}x$

(2) $y(x)=c_1x\sin(\ln x)+c_2x\cos(\ln x)+x\ln x$

9. $x(t)=2e^{t}-2e^{-t^3}+e^{t^2}$

10. 利用线性方程解的结构定理

方程的通解为：$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+x_p(t)$， 其中$x_1(t)$和$x_2(t)$是齐次方程两个线性无关的解，$x_p(t)$是非齐次方程的一个特解。非齐次方程的任意一个解$\varphi(t)$都可以通过选择适当的常数$c_1$和$c_2$来得到.

首先证明$x_1(t)$、$x_2(t)$和$x_p(t)$线性无关：

如果$x_1(t)$、$x_2(t)$和$x_p(t)$线性相关，则有不全为零的常数c_1、c_2和c_3，满足$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+c_3x_p(t)\equiv 0$。如果$c_3=0$，$x_1(t)$和$x_2(t)$线性相关，如果$c_3\neq 0$，$x_p(t)=-(c_1x_1(t)+c_2x_2(t))/c_3$，$x_p(t)$就只能是齐次方程的解。这两种情况都会导致矛盾，所以$x_1(t)$、$x_2(t)$和$x_p(t)$线性无关。

再证非齐次方程有三个线性无关的解：$x_1(t)+x_p(t)$、$x_2(t)+x_p(t)$和$x_p(t)$

如果有不全为零的常数c_1、c_2和c_3，满足

$$c_1(x_1(t)+x_p(t))+c_2(x_2(t)+x_p(t))+c_3x_p(t)\equiv 0,$$

即 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+(c_1+c_2+c_3)\ x_p(t)\equiv 0$，

由$x_1(t)$、$x_2(t)$和$x_p(t)$线性无关得$c_1=0$，$c_2=0$，$c_3=0$。

所以$x_1(t)+x_p(t)$、$x_2(t)+x_p(t)$和$x_p(t)$线性无关。

再证非齐次方程最多有三个线性无关的解：

如果$\varphi_1(t)$、$\varphi_2(t)$、$\varphi_3(t)$和$\varphi_4(t)$是方程的解，则$\varphi_1(t)-\varphi_2(t)$，$\varphi_1(t)-\varphi_3(t)$，$\varphi_1(t)-\varphi_4(t)$是齐次方程的解，必然线性相关，有不全为零的常数$b_1$、$b_2$和$b_3$，使得 $b_1(\varphi_1(t)-\varphi_2(t))+b_2(\varphi_1(t)-\varphi_3(t))+b_3(\varphi_1(t)-\varphi_4(t))\equiv 0$，

即 $(b_1+b_2+b_3)\ \varphi_1(t)-b_1\varphi_2(t)-b_2\varphi_3(t)-b_3\varphi_4(t)\equiv 0$。

由于b_1、b_2、b_3和$b_1+b_2+b_3$至少有一个非零，所以$\varphi_1(t)$、$\varphi_2(t)$、$\varphi_3(t)$和$\varphi_4(t)$这4个解必然线性相关。