数学物理方法

Charles

2024 年 1 月 7 日

目录

1 线性空间及线性算子

1.1 $\mathbf{R}^3$ 空间向量分析

1.1.1 向量的概念

- 标积：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$
- 矢积：$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$

1.1.2 $\mathbf{R}^3$ 空间向量代数

1. 运算规则符号：
   (1) Einstein 求和约定：$\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{e}_i$

   (2) Kronecher δ 符号：$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

   (3) Levi-Civita 符号：$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & i,j,k\text{ 偶排列}\\ -1 & i,j,k\text{ 奇排列}\\ 0 & i,j,k\text{ 有相同者}\end{cases}$

   (4) 单位全反对称张量乘积公式：$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}$

   Proof. 注意到，Levi-Civita 符号可由单位向量混合积得到：

$$\varepsilon_{ijk}=[\boldsymbol{e}_i\quad\boldsymbol{e}_j\quad\boldsymbol{e}_k]=\begin{vmatrix}e_{i1}&e_{i2}&e_{i3}\\e_{j1}&e_{j2}&e_{j3}\\e_{k1}&e_{k2}&e_{k3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta_{i1}&\delta_{i2}&\delta_{i3}\\\delta_{j1}&\delta_{j2}&\delta_{j3}\\\delta_{k1}&\delta_{k2}&\delta_{k3}\end{vmatrix}$$

   下面考虑一般形式：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}&=\begin{vmatrix}\delta_{i1}&\delta_{i2}&\delta_{i3}\\\delta_{j1}&\delta_{j2}&\delta_{j3}\\\delta_{k1}&\delta_{k2}&\delta_{k3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\delta_{l1}&\delta_{l2}&\delta_{l3}\\\delta_{m1}&\delta_{m2}&\delta_{m3}\\\delta_{n1}&\delta_{n2}&\delta_{n3}\end{vmatrix}^T=\begin{vmatrix}\delta_{il}&\delta_{im}&\delta_{in}\\\delta_{jl}&\delta_{jm}&\delta_{jn}\\\delta_{kl}&\delta_{km}&\delta_{kn}\end{vmatrix}\xlongequal{i\text{替换}l}\begin{vmatrix}3&\delta_{im}&\delta_{in}\\\delta_{ji}&\delta_{jm}&\delta_{jn}\\\delta_{ki}&\delta_{km}&\delta_{kn}\end{vmatrix}\\&=3\begin{vmatrix}\delta_{jm}&\delta_{jn}\\\delta_{km}&\delta_{kn}\end{vmatrix}-\delta_{im}\begin{vmatrix}\delta_{ji}&\delta_{jn}\\\delta_{ki}&\delta_{kn}\end{vmatrix}+\delta_{in}\begin{vmatrix}\delta_{ji}&\delta_{jm}\\\delta_{ki}&\delta_{km}\end{vmatrix}\\&=3(\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km})-\delta_{im}(\delta_{ji}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{ki})+\delta_{in}(\delta_{ji}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{ki})\\&=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\end{aligned}$$

□

2. $\mathbf{R}^3$ 空间向量运算：
   (1) 加法：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_1+B_1)\boldsymbol{e}_1+(A_2+B_2)\boldsymbol{e}_2+(A_3+B_3)\boldsymbol{e}_3=(A_i+B_i)\boldsymbol{e}_i$
   (2) 数乘：$\alpha\boldsymbol{A}=\alpha A_1\boldsymbol{e}_1+\alpha A_2\boldsymbol{e}_2+\alpha A_3\boldsymbol{e}_3=\alpha A_i\boldsymbol{e}_i$
   (3) 标积：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=A_iB_i$
   (4) 矢积：$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_iA_jB_k$

1.1.3 $\mathbf{R}^3$ 空间向量分析

Definition 1.1 (nabla 算子)

$$\nabla = \partial_i \boldsymbol{e}_i \tag{1.1}$$

Definition 1.2 (Laplace 算符)

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = (\boldsymbol{e}_i \partial_i) \cdot (\boldsymbol{e}_j \partial_j) = \delta_{ij} \partial_i \partial_j = \partial_i \partial_i \tag{1.2}$$

Definition 1.3 (标量场的梯度)

$$\mathrm{grad}\ \varphi = \nabla \varphi = \boldsymbol{e}_i \partial_i \varphi \tag{1.3}$$

Definition 1.4 (向量场的散度)

$$\mathrm{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \partial_i A_i \tag{1.4}$$

Definition 1.5 (向量场的旋度)

$$\mathrm{Curl}\ \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_i \partial_j A_k \tag{1.5}$$

Theorem 1.1 (Gauss 公式)

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V \tag{1.6}$$

Lemma 1.1 (Green 公式)

$$\int_{\partial V} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}\sigma = \int_V (\psi \nabla^2 \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) \mathrm{d}V \tag{1.7}$$

$$\int_{\partial V} (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) \mathrm{d}V \tag{1.8}$$

Theorem 1.2 (Stokes 公式)

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.9}$$

调和函数的两个基本性质:

$$\int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{1.10}$$

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} u \mathrm{d}\sigma \tag{1.11}$$

1.1.4 $\mathbf{R}^3$ 空间向量分析的重要公式

1. $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$ (1.12)
2. $\nabla \times \boldsymbol{r} = 0$ (1.13)
3. $\nabla(\varphi + \psi) = \nabla \varphi + \nabla \psi$ (1.14)
4. $\nabla(\varphi \psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi$ (1.15)
5. $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B}$ (1.16)
6. $\nabla \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{B}$ (1.17)
7. $\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \boldsymbol{A}$ (1.18)
8. $\nabla \times (\varphi \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \times (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \boldsymbol{A}$ (1.19)
9. $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$ (1.20)
10. $\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla) \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla) \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{B})$ (1.21)
11. $\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla) \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} \cdot \nabla) \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times \nabla \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times \nabla \times \boldsymbol{B}$ (1.22)
12. $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ (1.23)
13. $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$ (1.24)
14. $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ (1.25)

1.2 $\mathbf{R}^3$ 空间曲线系向量分析

1.2.1 $\mathbf{R}^3$ 空间中的曲线系

Definition 1.6 ($\mathbf{R}^3$ 空间中的曲线系) 在 Cartesian 坐标系中,空间一点坐标可由三个独立坐标参数 (u_1, u_2, u_3) 描述，且与 Cartesian 坐标参数 (x_1, x_2, x_3) 存在单值的函数变换关系，则坐标参数 (u_1, u_2, u_3) 构成 $\mathbf{R}^3$ 空间中的**曲线系**。如果此曲线系下每一点都有过此点的三条坐标曲线切向量相互正交，则称为**正交曲线系**。令其过渡矩阵等于一常向量，就得到用 (x_1, x_2, x_3) 表示的三个坐标曲面：

$$\begin{aligned} u^1(x_1, x_2, x_3) &= c_1 \\ u^2(x_1, x_2, x_3) &= c_2 \\ u^3(x_1, x_2, x_3) &= c_3 \end{aligned} \tag{1.26}$$

其中，每两个坐标曲面相交而成**坐标曲线**。

1.2.2 曲线系中的度量

Definition 1.7 (度量系数)

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial u_i}\frac{\partial x^k}{\partial u_j} \tag{1.27}$$

对正交曲线系有：

$$g_{ij} = \begin{cases} g_{ii} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1.28}$$

Definition 1.8 (度量分量) 正交曲线系的度量分量是度量系数的根：

$$h_i = \sqrt{g_{ii}} \tag{1.29}$$

1. 一般正交曲线系：
   (1) 线元：
$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j = g_{11}(\mathrm{d}u_1)^2 + g_{22}(\mathrm{d}u_2)^2 + g_{33}(\mathrm{d}u_3)^2 \tag{1.30}$$
   (2) 面元：
$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = \mathrm{d}s_i\mathrm{d}s_j = h_i h_j \mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j \tag{1.31}$$
   (3) 体元：
$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_i\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3 = h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3 \tag{1.32}$$

2. 柱坐标 (ρ, φ, z)：
   (1) 度量：
$$g_{\rho\rho} = 1,\ g_{\varphi\varphi} = \rho^2,\ g_{zz} = 1 \tag{1.33}$$
$$h_\rho = 1,\ h_\varphi = \rho,\ h_z = 1 \tag{1.34}$$
   (2) 线元：
$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{1.35}$$
   (3) 面元：
$$\mathrm{d}\sigma_{\rho\varphi} = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}\sigma_{\rho z} = \mathrm{d}\rho\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}\sigma_{\varphi z} = \rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \tag{1.36}$$
   (4) 体元：
$$\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \tag{1.37}$$

3. 球坐标 (r, θ, φ):

(1) 度量:

$$g_{rr} = 1,\ g_{\theta\theta} = r^2,\ g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta \tag{1.38}$$

$$h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_\varphi = r\sin\theta \tag{1.39}$$

(2) 线元:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 \tag{1.40}$$

(3) 面元:

$$\mathrm{d}\sigma_{r\theta} = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}\sigma_{r\varphi} = r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}\sigma_{\theta\varphi} = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{1.41}$$

(4) 体元:

$$dV = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{1.42}$$

1.2.3 曲线系中的向量分析

1. 一般正交曲线系:

(1) 梯度:

$$\nabla = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3 \tag{1.43}$$

(2) 散度:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right] \tag{1.44}$$

(3) 旋度:

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} =& \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\right]\boldsymbol{e}_1 + \\ & \frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3h_3)\right]\boldsymbol{e}_2 + \\ & \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)\right]\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{1.45}$$

(4) Laplace 算符:

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\right] \tag{1.46}$$

2. 柱坐标 (ρ, φ, z):

(1) 梯度:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.47}$$

(2) 散度:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(A_\rho\rho) + \frac{\partial}{\partial\varphi}A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}(A_z\rho)\right] \tag{1.48}$$

(3) 旋度:

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}A_z - \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\rho + \left[\frac{\partial}{\partial z}A_\rho - \frac{\partial}{\partial\rho}A_z\right]\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}A_\rho\right]\boldsymbol{e}_z \tag{1.49}$$

(4) Laplace 算符:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial}{\partial z}\right)\right] \tag{1.50}$$

3. 球坐标 (r,θ,φ)：

(1) 梯度：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.51}$$

(2) 散度：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A_r r^2\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi r)\right] \tag{1.52}$$

(3) 旋度：

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\theta)\right]\boldsymbol{e}_r + \\ \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right]\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned} \tag{1.53}$$

(4) Laplace 算符：

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{1.54}$$

1.3 线性空间

1.3.1 线性空间

Definition 1.9 (线性空间) 线性空间是 $\mathbf{R}^3$ 空间的推广，又称**向量空间**或**线性流形 (linear manifold)**。其满足如下八条规则：

1. 零元：$\varphi + 0 = \varphi$
2. 负元：$\varphi + (-\varphi) = 0$
3. 单位元：$1\varphi = \varphi$
4. 加法交换律：$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_1$
5. 加法结合律：$(\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3 = \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3)$
6. 加法分配律：$k(\varphi_1 + \varphi_2) = k\varphi_1 + k\varphi_2$
7. 数乘结合律：$(kl)\varphi = k(l\varphi)$
8. 数乘分配律：$(k+l)\varphi = k\varphi + l\varphi$

Definition 1.10 (线性空间的维数) 线性空间 L 中最大无关组的数目 n，记为 $\dim L = n$。

Definition 1.11 (线性空间的内积) 对于数域 K 和线性空间 L，内积为一个映射。其满足如下三条规则：

1. 共轭对称：$\langle\varphi,\psi\rangle = \langle\psi,\varphi\rangle^*$
2. 对第二个元素线性：$\langle\varphi,k\psi\rangle = k\langle\varphi,\psi\rangle$，$\langle k\varphi,\psi\rangle = k^*\langle\varphi,\psi\rangle$
3. 非负性：$\langle\varphi,\varphi\rangle \geqslant 0$

Definition 1.12 (向量的正交)

$$\langle\varphi,\psi\rangle = 0 \tag{1.55}$$

Definition 1.13 (向量的模)

$$|\varphi| = \langle\varphi,\varphi\rangle^{\frac{1}{2}} = (\xi_i^*\xi_i)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.56}$$

Definition 1.14 (向量的归一化)

$$\widetilde{\varphi} = \frac{\varphi}{|\varphi|} \tag{1.57}$$

Theorem 1.3 (Gram-Schmidt 正交化规则) n 维线性空间 L 任意 n 个线性无关的向量 $\{\varphi_i\}$，可用此规则构造出 n 个正交归一的向量 $\{\tilde{\varphi}_i\}$：

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{\varphi_i - \langle\tilde{\varphi}_1,\varphi_i\rangle\tilde{\varphi}_1 - \cdots\langle\tilde{\varphi}_{i-1},\varphi_i\rangle\tilde{\varphi}_{i-1}}{|\varphi_i - \langle\tilde{\varphi}_1,\varphi_i\rangle\tilde{\varphi}_1 - \cdots\langle\tilde{\varphi}_{i-1},\varphi_i\rangle\tilde{\varphi}_{i-1}|} \tag{1.58}$$

1.3.2 Hilbert 空间

Definition 1.15 (Hilbert 空间) 完备的内积空间称为 **Hilbert 空间**，记为 $\mathcal{H}$。
Definition 1.16 (Hilbert 空间的内积)

$$\langle \varphi, \chi \rangle = \int_{\Omega} \varphi^*(x)\chi(x)\mathrm{d}x \tag{1.59}$$

Definition 1.17 (Hilbert 空间的模) Hilbert 空间是平方可积的空间，则 $\varphi(x)$ 的模为有限值。

$$|\varphi| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \varphi^* \varphi \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{1.60}$$

1.3.3 线性算符

1. 坐标变换 A：

$$\chi = A\varphi \tag{1.61}$$

2. 微分算符 D, ∇, ∇^2：

$$D_x \varphi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x) \tag{1.62}$$

3. 对称算符和反对称算符：

$$S = \frac{1}{2}(B + \widetilde{B}) \tag{1.63}$$

$$A = \frac{1}{2}(B - \widetilde{B}) \tag{1.64}$$

$$B = S + A \tag{1.65}$$

4. 伴随算符 $A^\dagger$：

$$\langle A\varphi, \chi \rangle = \langle \varphi, A^\dagger \chi \rangle \tag{1.66}$$

5. 厄米算符：自伴算符

$$A^\dagger = A \tag{1.67}$$

6. 幺正算符：

$$U^\dagger U = I \tag{1.68}$$

1.3.4 线性算符的特征值和特征向量

1. 特征方程：

$$A\varphi = \lambda\varphi \tag{1.69}$$

2. 可以化为：

$$(\lambda I - A)\varphi = 0 \tag{1.70}$$

3. 这个齐次线性方程组有非零解的条件为：

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{1.71}$$

Proposition 1.1 厄米算符的特征值是实数。
Proposition 1.2 厄米算符的不同特征值的特征向量正交。

2　复变函数

2.1　复变函数的概念

2.1.1　复数与复数运算

1. 欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2.1}$$

2. 复数的三种表示方式：
   (1) 代数表示：

$$z = x + iy \tag{2.2}$$

   (2) 几何表示：

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)) \tag{2.3}$$

   (3) 指数表示：

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)} \tag{2.4}$$

3. 复数运算：
   (1) 加法：

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{2.5}$$

   (2) 乘法：

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{2.6}$$

   (3) 除法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{2.7}$$

4. 复数的辐角：

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi = \theta + 2k\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \tag{2.8}$$

5. 复数运算公式：

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{2.9}$$

$$z^n = r^ne^{in\theta} \tag{2.10}$$

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \tag{2.11}$$

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{2.12}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \tag{2.13}$$

6. 复数球面：

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{z + z^*}{1 + zz^*}, \quad \eta = \frac{1}{2i}\frac{z - z^*}{1 + zz^*}, \quad \zeta = \frac{zz^*}{1 + zz^*} \tag{2.14}$$

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \tag{2.15}$$

2.1.2　复变函数

Definition 2.1 (复变函数) $f : \mathbf{C}^{\mathbf{R}} \to \mathbf{C}$，其一般形式为

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2.16}$$

2.2　复变函数的解析性

2.2.1　复变函数的导数

Definition 2.2 (导数)

$$f'(z_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{2.17}$$

Theorem 2.1 (C-R 条件) 可导的必要条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.18}$$

2.2.2　复变函数积分

Definition 2.3 (积分)

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \int_l (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_l (u\mathrm{d}y + v\mathrm{d}x) \tag{2.19}$$

计算时常用参数变换法：

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t \tag{2.20}$$

2.2.3　Cauchy 定理

Theorem 2.2 (Cauchy 定理) 闭区域 D 中的解析函数 $f(z)$ 沿任意闭合曲线 C 的积分为 0。

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{2.21}$$

Theorem 2.3 (Cauchy 积分公式) $f(z)$ 在闭区域 D 中解析，对于 D 内任意一点 z，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \tag{2.22}$$

解析函数高阶导数的 Cauchy 公式：

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi \tag{2.23}$$

Lemma 2.1 (莫列拉定理) 闭区域 D 中连续函数 $f(z)$ 沿任意闭合曲线积分为 0 $\Rightarrow$ $f(z)$ 在 D 内解析。
Lemma 2.2 (最大模定理) $\max|f(x)|$ 只能在其解析区域的边界上达到。
Lemma 2.3 (刘维尔定理) $z \to \infty$ 时 $|f(z)|$ 有界 $\Rightarrow$ $f(z)$ 为一常数。
Lemma 2.4 (Cauchy 不等式)

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\frac{Ml}{d^{n+1}} \tag{2.24}$$

2.3　复变函数的幂级数展开

2.3.1　复变函数项级数

Definition 2.4 (复变函数项级数) 形如 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$，前 n 项部分和为 $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$。

Definition 2.5 (幂级数) 形如 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k$ 的级数称为以 z_0 为中心的幂级数。

Theorem 2.4 (Abel 定理) 幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k$ 在点 z_1 处收敛，则在 $|z_1 - z_0|$ 圆域内绝对收敛；在点 z_1 处发散，则在 $|z_1 - z_0|$ 圆域外发散。

幂级数收敛半径的求法：

1. d'Alembert 检比法：

$$R = 1 \bigg/ \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \tag{2.25}$$

2. Cauchy 检根法：

$$R = 1 \bigg/ \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \tag{2.26}$$

2.3.2 Taylor 展开

Theorem 2.5 (Taylor 定理) $f(z)$ 在 z_0 的邻域 $U(z_0, R)$ 中解析，则可展开为泰勒级数

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{2.27}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi \tag{2.28}$$

常用 Taylor 级数：

1. $\mathrm{e}^z = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} z^n,\ z \in (-\infty, +\infty)$ (2.29)

2. $\sin z = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},\ z \in (-\infty, +\infty)$ (2.30)

3. $\cos z = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},\ z \in (-\infty, +\infty)$ (2.31)

4. $\ln(1+z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1},\ z \in (-1, 1)$ (2.32)

5. $\frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty z^n,\ z \in (-1, 1)$ (2.33)

6. $\frac{1}{1+z} = \sum_0^\infty (-1)^n z^n,\ z \in (-1, 1)$ (2.34)

7. $(1+z)^\alpha = \sum_0^\infty \mathrm{C}_\alpha^n z^n \mathrm{e}^{2\alpha k\pi \mathrm{i}}$ (2.35)

2.3.3 Laurent 展开

Theorem 2.6 (Laurent 定理) $f(z)$ 在 z_0 为中心的圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 中解析，则

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{2.36}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi \tag{2.37}$$

孤立奇点的类型：

1. **可去奇点**：$f(z)$ 在 z_0 处的 Laurent 级数没有负幂项。
2. m **阶极点**：$f(z)$ 在 z_0 处的 Laurent 级数有 m 阶负幂项。
3. **本性奇点**：$f(z)$ 在 z_0 处的 Laurent 级数有无穷阶负幂项。

2.4 留数及其应用

2.4.1 留数定理

Definition 2.6 (留数) $f(z)$ 在 z_0 处的 Laurent 级数的负一次项系数，记作

$$\mathrm{Res} f(z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z) \mathrm{d}z \tag{2.38}$$

Theorem 2.7 (留数定理)

$$\oint_C f(z) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res} f(z_k) \tag{2.39}$$

Theorem 2.8 (留数之和定理) $f(z)$ 在复平面上存在有限个孤立奇点 ⇒ 复平面内留数之和为 0。

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res} f(z_k) + \mathrm{Res} f(\infty) = 0 \tag{2.40}$$

Theorem 2.9 (Cauchy 幅角原理) $f(z)$ 零点阶数为 M_i，极点阶数为 N_i

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{m} M_i + \sum_{j=1}^{n} N_j \tag{2.41}$$

1. 留数 $\mathrm{Res} f(z_0)$ 的求法：
   (1) 当 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点时，$\mathrm{Res} f(z_0) = 0$
   (2) 当 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点时，

$$\mathrm{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \tag{2.42}$$

   (3) 当 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点时，展开为 Laurent 级数并取其 a_{-1}。
   (4) 当 z_0 是 $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ 的一阶极点时，

$$\mathrm{Res} f(z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \tag{2.43}$$

   (5) 对数留数：$f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$
      a. 当 z_0 是 $g(z)$ 的 n 阶零点时，

$$\mathrm{Res} f(z_0) = n \tag{2.44}$$

      b. z_0 是 $g(z)$ 的 n 阶极点时，

$$\mathrm{Res} f(z_0) = -n \tag{2.45}$$

2. 无穷远点留数 $\mathrm{Res} f(\infty)$ 的求法：
   (1) 先求留数 $\mathrm{Res} f(z_0)$，再利用留数之和定理。
   (2) 当 $f(\infty) = 0$ 时，

$$\mathrm{Res} f(\infty) = -\lim_{z \to \infty} z f(z) \tag{2.46}$$

   (3) 当 $f(\infty) \neq 0$ 时，

$$\mathrm{Res} f(\infty) = -\mathrm{Res} \left[\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) \right]_{t=0} \tag{2.47}$$

2.4.2 运用留数计算实变积分

Definition 2.7 (Cauchy 主值) $f(x)$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 奇异，则 $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$ 的 Cauchy 主值为

$$P \int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) \mathrm{d}x + \int_{x_0 + \varepsilon}^{b} f(x) \mathrm{d}x \right) \tag{2.48}$$

Lemma 2.5 (Jordan 引理) $f(z)$ 在上半复平面除有限个孤立奇点和实轴上有限个一阶极点外解析，且 $\lim_{|z|\to\infty} f(z) \leqslant M(R) \to 0 \Rightarrow$

$$J = \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z = 0, \quad m > 0 \tag{2.49}$$

1. 计算无穷限的实变积分：
   (1) $f(z)$ 在上半复平面有有限个孤立奇点 z_k。
   (2) $f(z)$ 在实轴上有有限个一阶极点 x_i。
   (3) 当 $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ 时，$\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$。
$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上}} \mathrm{Res}f(z_k) + \pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}f(x_i) \tag{2.50}$$

2. 计算带有三角函数的实变积分：
   (1) $f(z)$ 在上半复平面有有限个孤立奇点 z_k。
   (2) $f(z)$ 在实轴上有有限个一阶极点 x_i。
   (3) 当 $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ 时，$\lim_{|z|\to\infty} f(z) \leqslant M(R) \to 0$。
$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上}} \mathrm{Res}\left[f(z_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_k}\right] + \pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(x_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx_i}\right] \tag{2.51}$$

$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx\mathrm{d}x = -2\pi\sum_{\text{上}} \mathrm{Im}\left(\mathrm{Res}\left[f(z_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_k}\right]\right) - \pi\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\left(\mathrm{Res}\left[f(x_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx_i}\right]\right) \tag{2.52}$$

$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx\mathrm{d}x = 2\pi\sum_{\text{上}} \mathrm{Re}\left(\mathrm{Res}\left[f(z_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz_k}\right]\right) + \pi\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{Res}\left[f(x_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx_i}\right]\right) \tag{2.53}$$

3. 计算有理三角函数式的实变积分：
$$I = \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta = \oint_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = 2\pi\mathrm{i}\sum_{|z|<1} \mathrm{Res}f(z_k) \tag{2.54}$$

4. 计算存在支点和割线的实变积分：
   (1) Mellin 变换型积分：
      a. $f(z)$ 为有理函数，在复平面上有有限个孤立奇点 z_k。
      b. $f(z)$ 在正实轴上无奇点，在 $z=0$ 处至多为一阶极点。
      c. $\lim_{|z|\to\infty} |z|^2|f(z)| \leqslant M$。
$$I = P\int_0^{+\infty} x^a f(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi a}}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[z_k^a f(z_k)\right], \quad 0 < a < 1 \tag{2.55}$$
   (2) 含有 $\ln x$ 的积分：
      a. $f(x)$ 为实轴上无奇点的有理函数、偶函数。
      b. $f(z)$ 在上半复平面有有限个孤立奇点 z_k。
      c. $\lim_{|z|\to\infty} |z|^2|f(z)| \leqslant M$。
$$I = P\int_0^{+\infty} f(x)\ln x\mathrm{d}x = \mathrm{i}\pi\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z_k)\ln z_k\right] - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{2.56}$$

2.4.3 Hilbert 变换

$$\mathrm{Re}f(z_0) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Im}f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \tag{2.57}$$

$$\mathrm{Im}f(z_0) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re}f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \tag{2.58}$$

2.5 保角变换

1. 解析函数变换的保角性质：

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\omega - \omega_0}{z - z_0} \neq 0 \tag{2.59}$$

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \arg \lim_{\omega\to\omega_0} (\omega - \omega_0) - \arg \lim_{z\to z_0} (z - z_0) \tag{2.60}$$

2. 常用保角变换：

(1) 分式线性变换：

$$\omega = \frac{az - b}{cz - d} \quad \left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}\right) \tag{2.61}$$

(2) 幂函数变换；

$$\omega = z^n \quad (n > 0) \tag{2.62}$$

(3) 对数变换：

$$\omega = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \tag{2.63}$$

(4) 茹科夫斯基变换：

$$z = \frac{a}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) \quad (a > 0, |\omega| \geqslant 1) \tag{2.64}$$

3. Laplace 算子的保角变换：

$$\nabla^2 = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) \tag{2.65}$$

3 积分变换与特殊函数

3.1 Fourier 变换

3.1.1 Fourier 级数

1. $f(x)$ 以 2π 为周期：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi,\ \pi] \tag{3.1}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x \tag{3.2}$$

2. $f(x)$ 以 $2l$ 为周期：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \quad x \in [-l,\ l] \tag{3.3}$$

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

3. $f(x)$ 以 2π 为周期，复数形式：

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} = C_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad x \in [-\pi,\ \pi] \tag{3.5}$$

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{3.6}$$

4. $f(x)$ 以 $2l$ 为周期，复数形式：

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}} \tag{3.7}$$

$$C_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}\mathrm{d}x, \quad x \in [-l,\ l] \tag{3.8}$$

3.1.2 Fourier 变换

Definition 3.1 (Fourier 变换)

$$\mathcal{F}(f(x)) = C(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{3.9}$$

Definition 3.2 (Fourier 逆变换)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{3.10}$$

Definition 3.3 (三维空间中的 Fourier 变换)

$$\mathcal{F}(f(x)) = C(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{3.11}$$

Definition 3.4 (三维空间中的 Fourier 逆变换)

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} C(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{3.12}$$

1. Fourier 变换的条件：Dirichlet 条件，$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛。
2. Fourier 变换的性质：
   (1) 线性定理：

$$\mathcal{F}(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) = \alpha\mathcal{F}(f_1(x)) + \beta\mathcal{F}(f_2(x)) \tag{3.13}$$

   (2) 延迟定理：

$$\mathcal{F}(f(x+x_0)) = \mathcal{F}(f(x))\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0} \tag{3.14}$$

   (3) 位移定理：

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x}f(x)) = C(k-k_0) \tag{3.15}$$

   (4) 标度变换定理：

$$\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|}C(\frac{k}{a}) \tag{3.16}$$

   (5) 对称定理：

$$\mathcal{F}(C(x)) = 2\pi f(-k) \tag{3.17}$$

   (6) 微分定理：$f^{(n-1)}(\infty) \to 0$

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(x)) = (\mathrm{i}k)^n\mathcal{F}(f(x)) \tag{3.18}$$

   (7) 积分定理：

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right) = \frac{1}{\mathrm{i}k}\mathcal{F}(f(x)) \tag{3.19}$$

   (8) 卷积定理：

$$F(f_1(x) * f_2(x)) = \mathcal{F}(f_1(x))\mathcal{F}(f_2(x)) \tag{3.20}$$

$$\mathcal{F}(f_1(x)f_2(x)) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(f_1(x)) * \mathcal{F}(f_2(x)) \tag{3.21}$$

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-\xi)f_2(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3.22}$$

   (9) Parseval 定理：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)G^*(k)\mathrm{d}k \tag{3.23}$$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x, \quad G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{3.24}$$

3.2 Laplace 变换

3.2.1 Laplace 变换

Definition 3.5 (Laplace 变换)

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \quad p = s + \mathrm{i}\sigma, \quad s \geqslant 0 \tag{3.25}$$

1. Laplace 变换的条件：当 $s \geqslant s_0$ 时，$\int_0^{+\infty} |f(t)\mathrm{e}^{-st}|\mathrm{d}t$ 收敛。
2. Laplace 变换的性质：
   (1) 线性定理：
$$\mathcal{L}(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) = \alpha\mathcal{L}(f_1(p)) + \beta\mathcal{L}(f_2(p)) \tag{3.26}$$
   (2) 延迟定理：
$$\mathcal{L}(f(t-\tau)) = \mathcal{L}(f(t))\mathrm{e}^{-p\tau}, \quad \tau > 0 \tag{3.27}$$
   (3) 位移定理：
$$\mathcal{L}(f(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}) = F(p+\lambda), \quad \mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\lambda) \tag{3.28}$$
   (4) 标度变换定理：
$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}F(\frac{p}{a}), \quad a > 0 \tag{3.29}$$
   (5) 微分定理：
$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{3.30}$$
   (6) 卷积定理：
$$\mathcal{L}(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(p)F_2(p) \tag{3.31}$$
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.32}$$
   (7) 周期变换定理：
$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\int_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau \tag{3.33}$$
3. 常用 Laplace 变换：
   (1) $\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{p}$ (3.34)
   (2) $\mathcal{L}(t) = \dfrac{1}{p^2}, \quad \mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{p^{n+1}} = \dfrac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$ (3.35)
   (3) $\mathcal{L}(t^\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ (3.36)
   (4) $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\lambda t}) = \dfrac{1}{p-\lambda}$ (3.37)
   (5) $\mathcal{L}(\sin\omega t) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ (3.38)
   (6) $\mathcal{L}(\cos\omega t) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ (3.39)
   (7) $\mathcal{L}(\mathrm{sh}\lambda t) = \dfrac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$ (3.40)
   (8) $\mathcal{L}(\mathrm{ch}\lambda t) = \dfrac{p}{p^2-\lambda^2}$ (3.41)
   (9) $\mathcal{L}(t^\alpha\mathrm{e}^{-\beta t}) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(p+\beta)^{\alpha+1}}$ (3.42)

3.2.2 Laplace 变换反演

Theorem 3.1 (Riemann-Mellin 公式)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} F(p) \mathrm{e}^{pt} \mathrm{d}p, \quad t > 0, \ s > s_0 \tag{3.43}$$

Theorem 3.2 (反演积分展开定理)

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} F(p) \mathrm{e}^{pt} \mathrm{d}p = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[F(p_k)\mathrm{e}^{p_k t}\right] \tag{3.44}$$

1. Laplace 变换反演的条件：当 $s > s_0$ 时，
   (1) $F(p)$ 解析。
   (2) $\lim_{|p|\to\infty} F(p) = 0$。
   (3) $\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} |F(p)|\mathrm{d}\sigma$ 收敛。
2. Laplace 变换反演的方法：
   (1) 利用 Riemann-Mellin 公式。
   (2) 利用常用 Laplace 变换。
   (3) 像函数的求导公式：

$$F^{(n)}(p) = \mathcal{L}((-1)^n t^n f(t)) \tag{3.45}$$

   (4) 像函数的积分公式：

$$\int_{p}^{+\infty} F(p) \mathrm{d}p = \mathcal{L}(\frac{f(t)}{t}) \tag{3.46}$$

3.3 Γ 函数

Definition 3.6 (Γ 函数)

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{3.47}$$

1. Γ 函数的解析性：$z = 0, -1, \ldots, -n, \ldots$ 是一阶极点
2. Γ 函数在各一阶极点处的留数：

$$\mathrm{Res}\Gamma(-n) = \lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.48}$$

3. Γ 函数的性质：
   (1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (3.49)
   (2) $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$ (3.50)
   (3) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ (3.51)
   (4) $\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\dfrac{\pi}{z \sin \pi z}$ (3.52)
   (5) $\Gamma(2z) = \dfrac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma(z+\dfrac{1}{2})$ (3.53)
   (6) $\Gamma(z_1)\Gamma(z_2) = \Gamma(z_1+z_2)B(z_1, z_2)$ (3.54)

4. 常用 Γ 函数：
   (1) $\Gamma(\dfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (3.55)
   (2) $\Gamma(n+\dfrac{1}{2}) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ (3.56)

3.4 δ 函数

Definition 3.7 (δ 函数)

1. $\delta(x-x_0)=\begin{cases}+\infty, & x-x_0=0\\ 0, & x-x_0\neq 0\end{cases}$ (3.57)

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1$ (3.58)

1. δ 函数的三维形式：

 (1) 直角坐标：

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \tag{3.59}$$

 (2) 柱坐标 (ρ,θ,z)：

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(z-z_0) \tag{3.60}$$

 (3) 球坐标 (r,θ,φ)：

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0) \tag{3.61}$$

 (4) Possion 形式：

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} \tag{3.62}$$

2. δ 函数的其他形式：

 (1) $\delta(x)=H'(x)$ (3.63)

 (2) $\delta(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon$ (3.64)

 (3) $\delta(x)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\delta(x,\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos kx\mathrm{e}^{-\alpha k}\mathrm{d}k=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$ (3.65)

 (4) $\delta(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{nx^2}$ (3.66)

 (5) $\delta(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^n\cos kx\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}$ (3.67)

3. δ 函数的性质：

 (1) $\delta(-x)=\delta(x)$ (3.68)

 (2) $f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0)$ (3.69)

 (3) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0)$ (3.70)

 (4) $\delta(\varphi(x))=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{|\varphi'(x_i)|}\delta(x-x_i)$ (3.71)

 $\Rightarrow\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x),\ \delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}(\delta(x+a)+\delta(x-a))$ (3.72)

4. δ 函数导数的性质：

 (1) $\delta^{(n)}(-x)=(-1)^n\delta(x)$ (3.73)

 (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)\mathrm{d}x=(-1)^nf^{(n)}(x_0)$ (3.74)

5. δ 函数的 Fourier 变换：

$$\mathcal{F}(\delta(x-x_0))=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0} \tag{3.75}$$

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\mathrm{d}k \tag{3.76}$$

6. δ 函数的 Fourier 展开：

$$\delta(x-x')=\sum_{-\infty}^{+\infty}\varphi_i^*(x')\varphi(x) \tag{3.77}$$

(1) 在 $\left\{\cos\frac{k\pi x}{l}\right\}$ 上展开：

$$\delta(x-x')=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x'}{l} \tag{3.78}$$

(2) 在 $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}$ 上展开：

$$\delta(x-x')=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x'}{l} \tag{3.79}$$

(3) 在 $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}\right\}$ 上展开：

$$\delta(x-x')=\frac{1}{2l}\sum_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{k\pi}{l}(x-x')} \tag{3.80}$$

4 数学物理方程

4.1 数学物理方程及其定解问题

1. 边界条件：

(1) Dirichlet 条件：边界处的函数值确定。

$$u|_{\partial\Omega}=g(\partial\Omega,t) \tag{4.1}$$

(2) Neumann 条件：边界处沿外法向的导数值确定。

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=g(\partial\Omega,t) \tag{4.2}$$

(3) 混合条件：

$$\left[\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial\Omega}=g(\partial\Omega,t)\quad(\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0) \tag{4.3}$$

(4) 统一写法：

$$\left[\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial\Omega}=g(\partial\Omega,t)\quad(\alpha^2+\beta^2\neq 0) \tag{4.4}$$

2. 三类方程的定解问题：

(1) 波动方程：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\nabla^2u=f(\Omega,t)\\ u(\Omega,0)=\varphi(\Omega)\\ u_t(\Omega,0)=\psi(\Omega)\\ \left[\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial\Omega}=g(\partial\Omega,t)\end{cases} \tag{4.5}$$

(2) 输运方程：

$$\begin{cases} u_t-a^2\nabla^2u=f(\Omega,t)\\ u(\Omega,0)=\varphi(\Omega)\\ \left[\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial\Omega}=g(\partial\Omega,t)\end{cases} \tag{4.6}$$

(3) Possion 方程：

$$\begin{cases} \nabla^2u=f(\Omega)\\ \left[\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial\Omega}=g(\partial\Omega)\end{cases} \tag{4.7}$$

4.2 S-L 本征值问题

Definition 4.1 (S-L 方程)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k(x)y'(x)] - q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{4.8}$$

Definition 4.2 (S-L 算符)

$$L = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] + q(x) \tag{4.9}$$

Proposition 4.1 S-L 本征值问题有无穷多非负的实本征值，它们单调递增且以无穷远点为凝聚点。

Proposition 4.2 S-L 本征值问题的本征函数构成完备的正交函数系。

Definition 4.3 (本征函数系上的广义 Fourier 展开)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n y_n(x), \quad C_n = \frac{1}{\int_a^b |y_n(x)|^2 \rho(x)\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\rho(x)y_n^*(x)\mathrm{d}x \tag{4.10}$$

4.3 分离变量法

4.3.1 齐次方程齐次边界条件下的分离变量法

求解两端固定弦自由振动的定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \nu(x) \end{cases} \tag{4.11}$$

分离变量：

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4.12}$$

原方程化为：

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = -\lambda \tag{4.13}$$

下面求解关于 $X(x)$ 的本征值问题：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

1. $\lambda < 0$，通解为 $X(x) = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$，代入边界条件得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$

其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}l} & \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}l} - \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}l} \neq 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$

2. $\lambda = 0$，通解为 $X(x) = C_1x + C_2$，代入边界条件得 $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$

3. $\lambda > 0$，通解为 $X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$，代入边界条件得 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1\cos\sqrt{\lambda}l + C_2\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$

1. 本征值：

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.15}$$

2. 本征函数 $X_n(x)$：

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.16}$$

3. 本征函数 $T_n(t)$：

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.17}$$

4. 本征解:

$$u_n(x,t) = (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{4.18}$$

5. 通解:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{4.19}$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \nu(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \dots \tag{4.20}$$

6. 几类常见边界条件对应的本征值和本征函数:

(1) $u(0,t) = u(l,t) = 0$:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{4.21}$$

(2) $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{4.22}$$

(3) $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$:

$$\lambda_n = \left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{4.23}$$

(4) $u_x(0,t) = u(l,t) = 0$:

$$\lambda_n = \left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{4.24}$$

4.3.2 非齐次方程齐次边界条件下的 Fourier 级数展开法

求解两端固定弦受迫振动的定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{4.25}$$

它的齐次通解可表示为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{4.26}$$

把 $f(x,t), \varphi(x), \nu(x)$ 展开为相同形式的 Fourier 级数:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{4.27}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{4.28}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \nu_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{4.29}$$

代入非齐次方程和初始条件，可得 $T_n(t)$ 的定解问题:

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n, \ T_n'(0) = \nu_n \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{4.30}$$

若初始条件 $\varphi(x)=\psi(x)=0$，对方程两边进行 $\mathcal{L}$ 变换：

$$p^2\mathcal{L}(T_n(t))+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\mathcal{L}(T_n(t))=\mathcal{L}(f_n(t)) \tag{4.31}$$

解得：

$$\mathcal{L}(T_n(t))=\frac{\mathcal{L}(f_n(t))}{p^2+(n\pi a/l)^2} \tag{4.32}$$

逆变换后：

$$T_n(t)=\int_0^t f_n(\tau)\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau \tag{4.33}$$

原非齐次方程的解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_0^t f_n(\tau)\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{4.34}$$

4.3.3 非齐次边界条件下的分离变量法

求解非齐次边界条件下弦受迫振动的定解问题：

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), \quad 0\leqslant x\leqslant l\\ u(0,t)=g_1(t),\ u(l,t)=g_2(t)\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\nu(x)\end{cases} \tag{4.35}$$

假设试解由两部分线性叠加：

$$u(x,t)=k(x,t)+\omega(x,t) \tag{4.36}$$

前一部分用来抵消非齐次边界条件：

$$k(0,t)=g_1(t), \quad k(l,t)=g_2(t), \quad \omega(0,t)=\omega(l,t)=0 \tag{4.37}$$

假设 $k(x,t)$ 是 x 的线性函数：

$$k(x,t)=A(t)x+B(t) \tag{4.38}$$

代入非齐次边界条件，可得：

$$A(t)=\frac{1}{l}[g_2(t)-g_1(t)], \quad B(t)=g_2(t) \tag{4.39}$$

$$k(x,t)=\frac{x}{l}g_2(t)+\frac{l-x}{l}g_1(t) \tag{4.40}$$

只需要求 $\omega(x,t)$ 的定解问题：

$$\begin{cases}\omega_{tt}-a^2\omega_{xx}=F(x,t)\\ \omega(0,t)=\omega(l,t)=0\\ \omega(x,0)=\varPhi(x),\ \omega_t(x)=V(x)\end{cases} \tag{4.41}$$

其中，

$$F(x,t)=f(x,t)-k_{tt}+a^2k_{xx}=f(x,t)-\frac{x}{l}g_2''(t)-\frac{l-x}{l}g_1''(t) \tag{4.42}$$

$$\varPhi(x)=\varphi(x)-k(x,0)=\varphi(x)-\frac{x}{l}g_2(0)-\frac{l-x}{l}g_1(0) \tag{4.43}$$

$$V(x)=\psi(x)-k_t(x,0)=\psi(x)-\frac{x}{l}g_2'(0)-\frac{l-x}{l}g_1'(0) \tag{4.44}$$

4.4 曲线系下的分离变量法

4.4.1 球坐标下的分离变量法

Laplace 方程：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \tag{4.45}$$

分离变量：

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(r,\theta) \tag{4.46}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=l(l+1) \tag{4.47}$$

径向方程：Euler 型方程

$$r^2R''+2rR'-l(l+1)R=0 \tag{4.48}$$

$$R_l(r)=C_lr^l+D_lr^{-(l+1)},\quad l=0,1,2,\dots \tag{4.49}$$

角向方程：球函数方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0 \tag{4.50}$$

分离变量：

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{4.51}$$

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=\lambda \tag{4.52}$$

周期性边界条件：

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)\Rightarrow\lambda_m=m^2 \tag{4.53}$$

$\Phi(\varphi)$ 方程：

$$\Phi''+m^2\Phi=0,\quad m=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{4.54}$$

$$\Phi_m(\varphi)=C_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\quad m=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{4.55}$$

$\Theta(\theta)$ 方程：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0 \tag{4.56}$$

令 $x=\cos\theta$，$y(x)=\Theta(\theta)$，得到连带 Legendre 方程：

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \tag{4.57}$$

1. 当轴对称时，$m=0\Rightarrow\Phi(\varphi)=1$

$$\Theta_l(\theta)=P_l(\cos\theta) \tag{4.58}$$

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{+\infty}(C_lr^l+D_lr^{-(l+1)})P_l(\cos\theta) \tag{4.59}$$

2. 当非轴对称时，

$$\Theta_l(\theta)=P_l^m(\cos\theta),\quad m=0,\pm1,\dots,\pm l \tag{4.60}$$

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{l}(C_lr^l+D_lr^{-(l+1)})P_l^m(\cos\theta)C_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{4.61}$$

$$=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{l}(C_lr^l+D_lr^{-(l+1)})Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{4.62}$$

Helmhotz 方程：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0 \tag{4.63}$$

分离变量：

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(r,\theta) \tag{4.64}$$

$$\frac{r^2}{R}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R\right]=-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=l(l+1) \tag{4.65}$$

径向方程：球 Bessel 方程

$$R''+\frac{2}{r}R'+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0 \tag{4.66}$$

$$R_n^{(l)}=C_n^{(l)}j_l(k_n^{(l)}r)+D_n^{(l)}n_l(k_n^{(l)}r),\quad l=0,1,2,\dots \tag{4.67}$$

角向方程：球函数方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0 \tag{4.68}$$

$\Phi(\varphi)$ 方程：

$$\Phi''+m^2\Phi=0,\quad m=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{4.69}$$

$$\Phi_m(\varphi)=C_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\quad m=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{4.70}$$

$\Theta(\theta)$ 方程：

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \tag{4.71}$$

1. 当轴对称时，$m=0\Rightarrow\Phi(\varphi)=1$

$$\Theta_l(\theta)=P_l(\cos\theta) \tag{4.72}$$

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}[C_n^{(l)}j_l(k_n^{(l)}r)+D_n^{(l)}n_l(k_n^{(l)}r)]P_l(\cos\theta) \tag{4.73}$$

2. 当非轴对称时，

$$\Theta_l(\theta)=P_l^m(\cos\theta),\quad m=0,\pm1,\dots,\pm l \tag{4.74}$$

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=1}^{+\infty}[C_n^{(l)}j_l(k_n^{(l)}r)+D_n^{(l)}n_l(k_n^{(l)}r)]P_l^m(\cos\theta)C_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{4.75}$$

$$=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=1}^{+\infty}[C_n^{(l)}j_l(k_n^{(l)}r)+D_n^{(l)}n_l(k_n^{(l)}r)]Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{4.76}$$

4.4.2 柱坐标下的分离变量法

Laplace 方程：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{4.77}$$

分离变量：

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \tag{4.78}$$

周期性边界条件：

$$\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\frac{\rho^2}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=m^2 \tag{4.79}$$

$$\frac{1}{\rho R}\frac{\partial}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)-\frac{m^2}{\rho^2}=-\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}=-\lambda \tag{4.80}$$

$\Phi(\varphi)$ 方程:

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{4.81}$$

$$\Phi_m(\varphi) = C_m e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{4.82}$$

$Z(z)$ 方程:

$$Z'' - \lambda Z = 0 \tag{4.83}$$

$R(\rho)$ 方程:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0 \tag{4.84}$$

1. 当 $\lambda > 0$ 时,令 $x = \sqrt{\lambda}\rho$, $y(x) = R(\rho)$,得到 m 阶 Bessel 方程:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{4.85}$$

(1) 当轴对称时,$m = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = 1$

$$R_n^{(0)}(\rho) = C_n J_0(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho) \tag{4.86}$$

$$Z_n^{(0)}(z) = A_n e^{\frac{x_n^{(0)}}{b}z} + B_n e^{-\frac{x_n^{(0)}}{b}z} \tag{4.87}$$

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n e^{\frac{x_n^{(0)}}{b}z} + B_n e^{-\frac{x_n^{(0)}}{b}z}\right] J_0(\frac{x_n^{(0)}}{b}\rho) \tag{4.88}$$

(2) 当非轴对称时,

$$R_n^{(m)}(\rho) = C_n^{(m)} J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right) \tag{4.89}$$

$$Z_n^{(m)}(z) = A_n^{(m)} e^{\frac{x_n^{(m)}}{b}z} + B_n^{(m)} e^{-\frac{x_n^{(m)}}{b}z} \tag{4.90}$$

$$u(\rho, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n^{(m)} e^{\frac{x_n^{(m)}}{b}z} + B_n^{(m)} e^{-\frac{x_n^{(m)}}{b}z}\right] J_m(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho) \tag{4.91}$$

2. 当 $\lambda < 0$ 时,令 $x = i\sqrt{-\lambda}\rho$, $y(x) = R(\rho)$,得到 m 阶虚宗量 Bessel 方程:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{4.92}$$

3. 当 $\lambda = 0$ 时,得到 Euler 型方程:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R = 0 \tag{4.93}$$

$$R_m(\rho) = \begin{cases} A + B\ln\rho, & m = 0 \\ A\rho^m + B\rho^{-m}, & m \neq 0 \end{cases} \tag{4.94}$$

在球内自然边界条件下:

$$R_m(\rho) = A\rho^m \tag{4.95}$$

$$Z(z) = Cz + D \tag{4.96}$$

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \rho^m e^{im\varphi}(C + Dz) \tag{4.97}$$

Helmhotz 方程:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \tag{4.98}$$

分离变量:

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \tag{4.99}$$

周期性边界条件：

$$\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\frac{\rho^2}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}+k^2\rho^2=-\frac{1}{\varPhi}\frac{\mathrm{d}^2\varPhi}{\mathrm{d}\varphi^2}=m^2 \tag{4.100}$$

$$\frac{1}{\rho R}\frac{\partial}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+k^2-\frac{m^2}{\rho^2}=-\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}=-\lambda \tag{4.101}$$

$\varPhi(\varphi)$ 方程：

$$\varPhi''+m^2\varPhi=0,\quad m=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{4.102}$$

$$\varPhi_m(\varphi)=C_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\quad m=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{4.103}$$

$Z(z)$ 方程：

$$Z''-\lambda Z=0 \tag{4.104}$$

$R(\rho)$ 方程：令 $x=\sqrt{k^2+\lambda}\rho$，$y(x)=R(\rho)$，得到 m 阶 Bessel 方程：

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0 \tag{4.105}$$

Remark. 通过选取合适的 k 总可以使 $k^2+\lambda\geqslant 0$，因此不会出现虚宗量。

4.5 二阶线性变系数常微分方程的级数解法

1. 二阶线性变系数常微分方程的一般形式：

$$u''(z)+p(z)u'(z)+q(z)u(z)=0 \tag{4.106}$$

2. 方程的解析性：
   (1) **常点**：$p(z)$ 和 $q(z)$ 在 z_0 及其邻域内解析。
   (2) **奇点**：z_0 是 $p(z)$ 或 $q(z)$ 的极点或本性奇点。
      a. **正则奇点**：z_0 至多是 $p(z)$ 的一阶极点，$q(z)$ 的二阶极点。
      b. **非正则奇点**：z_0 不是正则奇点。
3. 当 z_0 是方程的常点时：

$$u_1(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k,\quad u_2(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}b_k(z-z_0)^k \tag{4.107}$$

4. 当 z_0 是方程的正则奇点时：
   (1) 当 $\rho_1-\rho_2\neq 0,\pm1,\pm2,\dots$ 时，

$$u_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k,\quad u_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{+\infty}b_k(z-z_0)^k \tag{4.108}$$

   (2) 当 $\rho_1-\rho_2=0,\pm1,\pm2,\dots$ 时，

$$u_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k,\quad u_2(z)=Au_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{+\infty}b_k(z-z_0)^k \tag{4.109}$$

5. 当 z_0 是方程的非正则奇点时：可能无解

$$u_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k,\quad u_2(z)=Au_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{+\infty}b_k(z-z_0)^k \tag{4.110}$$

4.6 球函数

4.6.1 Legendre 多项式

1. 求解 Legendre 方程的 S-L 本征值问题:

$$\begin{cases}(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0\\ |y(x)|<+\infty,\quad -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\tag{4.111}$$

在常点 $x=0$ 处展开:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-\sum_{k=0}^{+\infty}[k(k+1)-l(l+1)]c_kx^k=0\tag{4.112}$$

递推公式:

$$c_k=-\frac{(k+2)(k+1)}{(l-k)(l+k+1)}c_{k+2},\quad c_l=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}\tag{4.113}$$

2. l 阶 Legendre 多项式:

$$P_l(x)=\sum_{n=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^ln!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n}\tag{4.114}$$

3. 前 5 阶 Legendre 多项式:

$$P_0(x)=1\tag{4.115}$$

$$P_1(x)=x\tag{4.116}$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\tag{4.117}$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\tag{4.118}$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\tag{4.119}$$

4. 常见 l 阶 Legendre 多项式表达式:

(1) 微分表达式（Rodrigues 公式）:

$$P_l(x)=\frac{1}{2^ll!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\tag{4.120}$$

(2) 积分表达式（Schlafli 公式）:

$$P_l(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{2^l}\oint_C\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}\mathrm{d}z\tag{4.121}$$

(3) 定积分表达式（Laplace 公式）:

$$P_l(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\cos\varphi)^l\mathrm{d}\varphi\tag{4.122}$$

5. Legendre 多项式的母函数:

$$f(r)=\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}P_l(x)r^l, & r\leqslant 1\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}P_l(x)\frac{1}{r^{l+1}}, & r>1\end{cases}\tag{4.123}$$

6. Legendre 多项式的性质:

(1) Legendre 多项式的递推公式:

a. 基本递推公式:

$$x(2l+1)P_l(x)-(l+1)P_{l+1}(x)-lP_{l-1}(x)=0\tag{4.124}$$

$$P_l(x)=P'_{l+1}(x)+P'_{l-1}(x)-2xP'_l(x)\tag{4.125}$$

b. 常用递推公式：

$$(2l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x) \tag{4.126}$$
$$(l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-xP'_l(x) \tag{4.127}$$
$$lP_l(x)=xP'_l(x)-P'_{l-1}(x) \tag{4.128}$$
$$(x^2-1)P'_l(x)=xlP_l(x)-lP_{l-1}(x) \tag{4.129}$$

(2) 正交完备性：

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\delta_{lk} \tag{4.130}$$

(3) Legendre 多项式系 Fourier 级数展开：

$$f(x)=\sum_{l=0}^{+\infty}f_lP_l(x),\quad f_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)\mathrm{d}x \tag{4.131}$$

4.6.2 连带 Legendre 函数

1. 求解连带 Legendre 方程的 S-L 本征值问题：

$$\begin{cases}(1-x^2)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\dfrac{m^2}{(1-x^2)}\right]y=0\\ |y(x)|<+\infty,\quad -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{4.132}$$

Legendre 方程两边对 x 求 m 次导：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{m+2}}{\mathrm{d}x^{m+2}}P_l(x)-2(m+1)x\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}P_l(x)+[l(l+1)-m(m+1)]\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)=0 \tag{4.133}$$

设试解：

$$y(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x),\quad m=0,\pm1,\ldots,\pm l \tag{4.134}$$

代入式(4.133)恰好得连带 Legendre 方程。

2. m 阶 l 次连带 Legendre 函数：

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x),\quad m>0 \tag{4.135}$$

3. m 阶 l 次连带 Legendre 函数的微分表达式（Rodrigues 公式）：

$$P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l,\quad m>0 \tag{4.136}$$

4. $-m$ 阶 l 次连带 Legendre 函数的微分表达式（Rodrigues 公式）：

$$P_l^{-m}(x)=\frac{(1-x^2)^{-m/2}}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l,\quad m>0 \tag{4.137}$$

5. 关系：

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x),\quad m>0 \tag{4.138}$$

6. 连带 Legendre 函数的性质：

(1) 连带 Legendre 函数的递推公式：

$$(2l+1)xP_l^m(x)=(l+m)P_{l-1}^m(x)+(l-m+1)P_{l+1}^m(x) \tag{4.139}$$

(2) 正交完备性：

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_{l'}^m(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'},\quad m>0 \tag{4.140}$$
$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_l^{m'}(x)\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{m}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{mm'},\quad m>0 \tag{4.141}$$

(3) 连带 Legendre 函数系 Fourier 级数展开：

$$f(x)=\sum_{l=0}^{+\infty}f_lP_l^m(x),\quad f_l=\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_{-1}^{1}f(x)P_l^m(x)\mathrm{d}x \tag{4.142}$$

4.6.3 球函数

1. 求解球函数方程的 S-L 本征值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0\\ Y(\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi+2\pi),\quad |Y(\theta,\varphi)|<+\infty,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases} \tag{4.143}$$

通解：

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=C_{lm}P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\quad l=0,1,2\ldots;\ m=0,\pm1,\ldots,\pm l \tag{4.144}$$

2. l 阶球函数：

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{4.145}$$

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{4.146}$$

3. 前 3 阶球函数：

$$Y_{00}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{4.147}$$

$$Y_{10}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\quad Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi)=\pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi} \tag{4.148}$$

$$Y_{20}=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1),\quad Y_{2,\pm1}(\theta,\varphi)=\pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi} \tag{4.149}$$

4. 球函数的性质：

(1) 正交完备性：

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}Y_{lm}^*(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{4.150}$$

(2) 球函数系 Fourier 级数展开：

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{l}f_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi),\quad f_{lm}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{4.151}$$

(3) 球函数的加法公式：

$$P_l(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{4.152}$$

4.7 柱函数

4.7.1 Bessel 函数

1. 求解 ν 阶 Bessel 方程：

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \tag{4.153}$$

在正则奇点 $x=0$ 处展开：

$$\sum_{k=0}^{+\infty}a_k[(k+s)^2-\nu^2]x^k+\sum_{k=0}a_kx^{k+2}=0 \tag{4.154}$$

x_0 系数的指标方程：

$$s^2-\nu^2=0 \tag{4.155}$$

递推公式：

$$a_k=-\frac{1}{k(k+2s)}a_{k-2},\quad a_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \tag{4.156}$$

常用通解式：

$$y(x)=CJ_\nu(x)+DJ_{-\nu}(x),\quad \nu\text{非整数} \tag{4.157}$$

$$y(x)=CJ_\nu(x)+DN_\nu(x) \tag{4.158}$$

$$y(x)=CH_\nu^{(1)}(x)+DH_\nu^{(2)}(x) \tag{4.159}$$

2. ν 阶 Bessel 函数：

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{4.160}$$

3. ν 阶 Neumann 函数：

$$N_\nu=\frac{\cos\nu\pi J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{4.161}$$

4. ν 阶 Hankel 函数：

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+\mathrm{i}N_\nu(x),\quad H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-\mathrm{i}N_\nu(x) \tag{4.162}$$

5. m 阶 Bessel 函数：

$$J_m(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} \tag{4.163}$$

6. m 阶 Neumann 函数：

$$N_m(x)=\frac{2}{\pi}J_m(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{1}{k!(m+k)!}[\varPhi(m+k+1)+\varPhi(k+1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} \tag{4.164}$$

7. m 阶 Bessel 函数的递推公式：

$$J_{-m}(x)=(-1)^mJ_m(x),\ N_{-m}(x)=(-1)^mN_m(x) \tag{4.165}$$

8. ν 阶 Bessel 函数的递推公式：

(1) 基本微商公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu J_\nu(x))=x^\nu J_{\nu-1}(x)=\nu x^{\nu-1}J_\nu(x)+x^\nu J_\nu'(x) \tag{4.166}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\nu}J_\nu(x))=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)=-\nu x^{-\nu-1}J_\nu(x)+x^{-\nu}J_\nu'(x) \tag{4.167}$$

(2) 基本递推公式：

$$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x),\quad J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J_\nu'(x) \tag{4.168}$$

$$N_{\nu-1}(x)+N_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}N_\nu(x),\quad N_{\nu-1}(x)-N_{\nu+1}(x)=2N_\nu'(x) \tag{4.169}$$

(3) 常用递推公式：

$$J_0'(x)=-J_1(x),\quad [xJ_1(x)]'=xJ_0(x) \tag{4.170}$$

9. $n+\frac{1}{2}$ 阶 Bessel 函数：

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n\frac{\sin x}{x} \tag{4.171}$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^{n+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n\frac{\cos x}{x} \tag{4.172}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \tag{4.173}$$

4.7.2 柱函数

1. ν 阶柱函数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu y_\nu) = x^\nu y_{\nu-1}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\nu} y_\nu) = -x^{-\nu} y_{\nu+1} \tag{4.174}$$

$$y_{\nu-1} + y_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x} y_\nu, \quad y_{\nu-1} - y_{\nu+1} = 2y'_\nu \tag{4.175}$$

Remark. ν 阶柱函数必是 ν 阶 *Bessel* 方程的解。

2. $J_m(x)$ 的母函数：

$$G(x,z) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) z^m \tag{4.176}$$

3. $J_m(x)$ 的积分表达式：

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{z^{m+1}} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(x\sin\theta - m\theta\right) \mathrm{d}\theta \tag{4.177}$$

4. $J_m(x)$ 的加法公式：

$$J_m(x_1 + x_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1) J_{m-1}(x_2) \tag{4.178}$$

5. 柱函数的性质：

(1) 奇异性：

$$J_0(0) = 1, \quad J_m(0) = 0 \ (m = 1, 2, \dots) \tag{4.179}$$

$$N_0(0) \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2}\bigg|_{x=0}, \quad N_m(0) \sim -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\bigg|_{x=0} (m = 1, 2, \dots) \tag{4.180}$$

$$H_0^{(1)} \sim \mathrm{i}\frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2}, \quad H_0^{(2)} \sim -\mathrm{i}\frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} \tag{4.181}$$

$$H_m^{(0)} \sim -\mathrm{i}\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}, \quad H_m^{(1)} \sim \mathrm{i}\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \ (m = 1, 2, \dots) \tag{4.182}$$

(2) 零点：

a. $J_m(x)$ 的零点关于原点对称。

b. $J_m(x)$ 与 $J_{m+1}(x)$ 的零点两两相间。

c. $J_{\pm\nu}(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 有无穷多正实数零点，$H_\nu^{(1)}(x)$ 和 $H_\nu^{(2)}(x)$ 无实数零点。

(3) 渐近行为：$|x| \to +\infty$

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o(x^{-3/2}) \tag{4.183}$$

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o(x^{-3/2}) \tag{4.184}$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\pi/2-\pi/4)} + +o(x^{-3/2}) \tag{4.185}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-\pi/2-\pi/4)} + +o(x^{-3/2}) \tag{4.186}$$

(4) $J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)$ 的正交完备性：

$$\int_0^b J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right) J_m\left(\frac{x_l^{(m)}}{b}\rho\right) \rho \mathrm{d}\rho = [N_n^{(m)}]^2 \delta_{nl} \tag{4.187}$$

(5) m 阶 Bessel 函数系 Fourier 级数展开：

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right), \quad f_n = \frac{1}{[N_n^{(m)}]^2} \int_0^b f(\rho) J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right) \rho \mathrm{d}\rho \tag{4.188}$$

(6) 归一化常数：

$$[N_n^{(m)}]^2 = \int_0^b J_m^2\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{x_n^{(m)}}\right)^2 [x^2J_m^2 - m^2J_m^2 + xJ_m']_0^{x_n^{(m)}} \tag{4.189}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{b^2}{2}[J_{m+1}(x_n^{(m)})]^2, & J_m(x_n^{(m)}) = 0 \\ \dfrac{b^2}{2}\left[1 - \left(\dfrac{m}{x_n^{(m)}}\right)^2\right][J_m(x_n^{(m)})]^2, & J_m'(x_n^{(m)}) = 0 \\ \dfrac{b^2}{2}\left[1 - \left(\dfrac{m}{x_n^{(m)}}\right)^2\right] + \dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{b}{x_n^{(m)}}\right)^2 [J_m(x_n^{(m)})]^2, & J_m'(x_n^{(m)}) = -\dfrac{\beta}{\alpha}J_(x_n^{(m)}) \end{cases} \tag{4.190}$$

6. 求解 Bessel 方程的 S-L 本征值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0 \\ \left[\alpha R + \beta\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right]_{\rho=0} = 0 \\ |R(\rho)|_{\rho=0} < +\infty \end{cases} \tag{4.191}$$

$$R_m(\rho) = C_mJ_m(\sqrt{\lambda}\rho) + D_mN_m(\sqrt{\lambda}\rho) \tag{4.192}$$

在球内自然边界条件下：

$$R_m(\rho) = C_mJ_m(\sqrt{\lambda}\rho) \tag{4.193}$$

(1) 第一类边界条件：

$$J_m(\sqrt{\lambda_n}b) = J_m(x_n^{(m)}) = 0 \tag{4.194}$$

(2) 第二类边界条件：

$$J_m'(\sqrt{\lambda_n}b) = \frac{1}{2}(J_{m-1}(x_n^{(m)}) - J_{m+1}(x_n^{(m)})) = 0 \tag{4.195}$$

(3) 第三类边界条件：数值解

$$\lambda_n^{(m)} = \left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.196}$$

$$R_n^{(m)}(\rho) = C_n^{(m)}J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.197}$$

4.7.3 虚宗量 Bessel 函数

1. 求解 ν 阶虚宗量 Bessel 方程：

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{4.198}$$

通解：

$$y(x) = CI_\nu(x) + DK_\nu(x) \tag{4.199}$$

2. ν 阶虚宗量 Bessel 函数：

$$I_\nu(x) = \mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(\mathrm{i}x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{4.200}$$

3. ν 阶 Mocdonald 函数：

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\pi\nu} \tag{4.201}$$

4. m 阶 Mocdonald 函数：

$$
\begin{aligned}
K_m(x) =& \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}+ \\
&(-1)^{m+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!(m+k)!}\left[\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\varPhi(m+k+1)-\frac{1}{2}\varPhi(k+1)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}
\end{aligned}
\tag{4.202}
$$

5. m 阶虚宗量 Bessel 函数的关系：

$$I_m(x)=I_{-m}(x) \tag{4.203}$$

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\mathrm{i}^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}x) \tag{4.204}$$

4.7.4 球 Bessel 函数

1. 求解 l 阶球 Bessel 方程：

$$y''+\frac{2}{x}y'+\left(1-\frac{l(l+1)}{x^2}\right)y=0 \tag{4.205}$$

常用通解式：

$$y(x)=Cj_l(x)+Dn_l(x) \tag{4.206}$$

$$y(x)=Ch_l^{(1)}(x)+Dh_l^{(2)}(x) \tag{4.207}$$

2. l 阶球 Bessel 函数：

$$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \tag{4.208}$$

3. l 阶球 Neumann 函数：

$$n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+\frac{1}{2}}(x) \tag{4.209}$$

4. l 阶球 Hankel 函数：

$$h_l^{(1)}(x)=j_l(x)+\mathrm{i}n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \tag{4.210}$$

$$h_l^{(2)}(x)=j_l(x)-\mathrm{i}n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) \tag{4.211}$$

5. l 阶球 Bessel 函数的递推公式：

$$\frac{1}{x^l}j_l=\left(-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l j_0(x),\quad \frac{1}{x^l}n_l=\left(-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l n_0(x) \tag{4.212}$$

$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x},\quad j_1(x)=\frac{1}{x^2}(\sin x-x\cos x) \tag{4.213}$$

$$n_0(x)=-\frac{\cos x}{x},\quad n_1(x)=-\frac{1}{x^2}(\cos x+x\sin x) \tag{4.214}$$

6. 平面波按球面波展开公式：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{+\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l j_l(kr)P_l(\cos\theta) \tag{4.215}$$

7. 球 Bessel 函数的性质：

(1) $j_l(k_n^{(l)}r)$ 的正交完备性：

$$\int_0^a j_l(k_n^{(l)}r)j_l(k_m^{(l)}r)r^2\mathrm{d}r=[N_n^{(l)}]^2\delta_{nm} \tag{4.216}$$

(2) l 阶球 Bessel 函数系 Fourier 级数展开：

$$f(r)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n j_l(k_n^{(l)}r),\quad f_n=\frac{1}{[N_n^{(l)}]^2}\int_0^a f(r)j_l(k_n^{(l)}r)r^2\mathrm{d}r \tag{4.217}$$

(3) 归一化常数:

$$[N_n^{(l)}]^2 = \int_0^a j_l^2(k_n^{(l)}r)r^2\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2k_n^{(l)}}\int_0^a J_{l+\frac{1}{2}}^2(k_n^{(l)}r)r\mathrm{d}r \tag{4.218}$$

8. 求解球 Bessel 方程的 S-L 本征值问题:

$$\begin{cases} R''(r) + \dfrac{2}{r}R'(r) - \left[k^2 - \dfrac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r) = 0 \\ [\alpha R(r) + \beta R'(r)]_{r=a} = 0 \\ |R(r)|_{r=0} < +\infty \end{cases} \tag{4.219}$$

$$R_l(r) = C_l j_l(kr) + D_l n_l(kr) \tag{4.220}$$

在球内自然边界条件下:

$$R_l(r) = C_l j_l(kr) \tag{4.221}$$

代入齐次边界条件:

$$k_n^{(l)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.222}$$

$$R_n^{(l)}(r) = C_n^{(l)} j_l(k_n^{(l)}r), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.223}$$

4.8 Green 函数法

4.8.1 Green 函数

1. 二阶常系数偏微分方程:

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^{n+1}, \quad n \leqslant 3 \tag{4.224}$$

$$L = a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} + b_i\frac{\partial}{\partial x_i} + c, \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \tag{4.225}$$

2. 自由 Green 函数（基本解）:

$$LG_0(x; x') = \delta(x - x'), \quad x, x' \in \mathbf{R}^{n+1}, \quad n \leqslant 3 \tag{4.226}$$

3. 非齐次方程解的一般形式:

$$u(x) = u_0(x) + \int G_0(x; x')f(x')\mathrm{d}x' \tag{4.227}$$

4. Green 函数:

$$\begin{cases} LG(x; x') = \delta(x - x') \\ \text{B.C.} \end{cases} \tag{4.228}$$

4.8.2 Laplace 算符的 Green 函数

1. Laplace 算符的基本解:

(1) 一维 Laplace 算符的基本解:

$$G_0(x; x') = \frac{1}{2}|x - x'| \tag{4.229}$$

(2) 二维 Laplace 算符的基本解:

$$G_0(x, x'; y, y') = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x - x')^2 + (y - x')^2} \tag{4.230}$$

(3) 三维 Laplace 算符的基本解:

$$G_0(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{4.231}$$

(4) n 维 Laplace 算符的基本解:

$$G_0(x;x') = \frac{1}{(n-2)S_n}\frac{1}{|x-x'|^{n-2}}, \quad S_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad x, x' \in \mathbf{R}^n \tag{4.232}$$

2. Laplace 算符的 Green 函数:

$$\begin{cases} \nabla^2 g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = 0 \\ \left[g + \beta\dfrac{\partial g}{\partial n}\right]_{\partial\Omega} = \left[G_0 + \beta\dfrac{\partial G_0}{\partial n}\right]_{\partial\Omega} \end{cases} \tag{4.233}$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') \tag{4.234}$$

(1) 第一类非齐次边界条件 Possion 方程的定解问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r} \in \Omega \subset \mathbf{R}^3 \\ u(\boldsymbol{r})|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{r}_0), & \boldsymbol{r}_0 \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.235}$$

$$u(\boldsymbol{r}) = -\int_\Omega G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \int_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\mathrm{d}\sigma' \tag{4.236}$$

(2) 第三类非齐次边界条件 Possion 方程的定解问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r} \in \Omega \subset \mathbf{R}^3 \\ \left[u + \beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{r}_0), & \boldsymbol{r}_0 \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.237}$$

$$u(\boldsymbol{r}) = -\int_\Omega G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \frac{1}{\beta}\int_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\sigma' \tag{4.238}$$

3. 二维圆上 Possion 方程的定解问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho,\theta) = f(\rho,\theta), & \rho < a \\ u(\theta)|_{r=a} = \varphi(\theta) \end{cases} \tag{4.239}$$

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^a \mathrm{d}\rho' \int_0^{2\pi} \ln\frac{\rho^2\rho'^2 + a^4 - 2\rho\rho' a^2\cos(\theta-\theta')}{a^2[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\theta-\theta']} f(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta' + \\ & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-\rho^2)\varphi(\theta')}{a^2+\rho^2-2\rho a\cos(\theta-\theta')}\mathrm{d}\theta' \end{aligned} \tag{4.240}$$

当 $f(\rho,\theta) = 0$ 时，得到圆上 Possion 公式:

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-\rho^2)\varphi(\theta')}{a^2+\rho^2-2\rho a\cos(\theta-\theta')}\mathrm{d}\theta' \tag{4.241}$$

4.8.3 Helmholtz 算符的 Green 函数

1. 三维 Helmohltz 算符的基本解满足的方程:

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{4.242}$$

2. Helmholtz 算符的基本解:

(1) 向外发散的球面波模式:

$$G_0^+(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.243}$$

(2) 向内汇聚的球面波模式:

$$G_0^+(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.244}$$

(3) 叠加的球面波模式:

$$G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{\cos(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.245}$$

4.8.4 输运算符的 Green 函数

1. 输运算符的基本解满足的方程:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-a^2\nabla^2\right)G_0(x,t;x',t')=\delta(x-x')\delta(t-t') \\ G_0(x,0;x',t')=0\end{cases},\ x\in\mathbf{R}^n,\ n\leqslant 3,\ t>0 \tag{4.246}$$

2. 输运算符的基本解:

(1) 一维输运算符的基本解:

$$G_0(x,t;x',t')=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t')}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2(t-t')}}H(t-t') \tag{4.247}$$

(2) 二维输运算符的基本解:

$$G_0(x,y,t;x',y',t')=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t')}}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4a^2(t-t')}}H(t-t') \tag{4.248}$$

(3) 三维输运算符的基本解:

$$G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t')}}\right)^3\mathrm{e}^{-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{4a^2(t-t')}}H(t-t') \tag{4.249}$$

4.8.5 波动算符的 Green 函数

1. 三维波动算符的基本解满足的方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\right)G_0(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{4.250}$$

2. 三维波动算符的基本解:

(1) 超前 Green 函数:

$$G_0^+(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(t-t'+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right) \tag{4.251}$$

(2) 推迟 Green 函数:

$$G_0^-(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right) \tag{4.252}$$

4.9 其他求解方法

4.9.1 积分变换法

求解一维无界空间弦自由振动的定解问题:

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\quad -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\nu(x)\end{cases} \tag{4.253}$$

方程两边同时对 x 作 $\mathcal{F}$ 变换:

$$\begin{cases}U_{tt}(\omega,t)+a^2\omega^2U(\omega,t)=0 \\ U(\omega,0)=\varPhi(x),\ U_t(\omega,0)=V(\omega)\end{cases} \tag{4.254}$$

通解:

$$U(\omega,t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t} \tag{4.255}$$

代入初始条件:

$$U(\omega,0)=A+B=\Phi(\omega) \tag{4.256}$$

$$U_t(\omega,0)=\mathrm{i}a\omega(a-b)=V(\omega) \tag{4.257}$$

解得:

$$U(\omega,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(\omega)+\frac{1}{\mathrm{i}a\omega}V(\omega)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t}+\frac{1}{2}\left[\Phi(\omega)-\frac{1}{\mathrm{i}a\omega}V(\omega)\right] \tag{4.258}$$

反演得 D'Alembert 公式:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\nu(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4.259}$$

4.9.2 行波法

求解一维无界空间弦自由振动的定解问题:

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\nu(x)\end{cases} \tag{4.260}$$

分解算子并重写波动方程:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \tag{4.261}$$

作变量代换:

$$\begin{cases}\xi=x+at\\ \eta=x-at\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta)\\ t=\dfrac{1}{2a}(\xi-\eta)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\xi}=\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+a\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}=-\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-a\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\end{cases} \tag{4.262}$$

波动方程化为:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}u=0 \tag{4.263}$$

解得:

$$u=\int_0^{\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi+f_2(\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)=f_1(x+at)+f_2(x-at) \tag{4.264}$$

代入初始条件:

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x) \tag{4.265}$$

$$af_1'(x)-af_2'(x)=\nu(x) \tag{4.266}$$

式(4.266)两边积分:

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\nu(\xi)\mathrm{d}\xi+C \tag{4.267}$$

解得 D'Alembert 公式:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\nu(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4.268}$$

4.9.3 冲量定理法

求解一维无限空间弦受迫振动的定解问题:

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), & -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\end{cases} \tag{4.269}$$

将连续作用的策动力看作一系列相继出现的瞬时力：

$$f(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.270}$$

当 $t > \tau$ 时，脉冲波满足自由振动的定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}^{(\tau)} - a^2 u_{xx}^{(\tau)} = 0, \quad -\infty < x < +\infty \\ u^{(\tau)}(x,\tau) = 0,\ u_t^{(\tau)}(x,\tau) = f(x,\tau) \end{cases} \tag{4.271}$$

作时间平移变换并使用 D'Alembert 公式：

$$u^{(\tau)}(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi \tag{4.272}$$

原定解问题的解为：

$$u(x,t) = \int_0^t \left[\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau \tag{4.273}$$

参考文献

[1] 杨孔庆. 数学物理方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.

[2] 吴崇试. 数学物理方法[M]. 北京: 北京大学出版社.

[3] 王竹溪，郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.

[4] 林福民. 数学物理方法简明教程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2008.