

数学分析入门

(第三册)

陆亚明

目 录

15 重积分	1
15.1 Jordan 测度	1
15.1.1 简单集合的测度	2
15.1.2 Jordan 测度	6
15.2 闭矩形上的积分	12
15.3 有界集上的积分	19
15.4 Fubini 定理	25
15.5 变量替换	34
15.5.1 启发式的讨论	34
15.5.2 主要定理的证明	38
15.5.3 一些特殊的变量替换	47
15.6 广义重积分	56
16 曲线积分	70
16.1 曲线的弧长	70
16.2 第一型曲线积分	79
16.3 第二型曲线积分	84
16.4 Green 公式	91
16.5 应用	98
17 曲面积分	103
17.1 曲面的面积	103
17.2 第一型曲面积分	108
17.3 曲面的侧与定向	111
17.4 第二型曲面积分	112
17.5 Gauss 公式	117
17.6 Stokes 公式	122
18 Fourier 分析初步	128
18.1 Fourier 级数的定义	128
18.2 局部化方法	135
18.3 均值定理	144

18.4 Fourier 变换	153
参考文献	160
索引	163

重积分

夫叠棋成立积，缘幂势既同，
则积不容异。

—— 祖暅

§ 15.1

Jordan 测度

在小学和中学，我们学习了如何去计算一些特殊的平面几何图形的面积和空间几何体的体积。但是无论是面积还是体积，在我们的脑海中都只有一个模糊的印象，而没有确切的定义。这两个概念以及它们在 \mathbb{R}^n 中的自然推广被统称为测度。

按照通常的想法，我们希望对 \mathbb{R}^n 的任一子集 A 定义其测度 $\mu(A)$ ，并希望所定义的测度满足下列性质：

- (1) μ 在非负实数集上取值；
- (2) 若 $A \subseteq B$ ，则 $\mu(A) \leq \mu(B)$ ；
- (3) 若 $A \cap B = \emptyset$ ，则 $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ ；
- (4) μ 在刚体变换^①下保持不变，也即是说，若 T 是刚体变换，则 $\mu(TA) = \mu(A)$ ；
- (5) 一些特殊几何体的测度与我们的几何认知一致，例如 \mathbb{R}^2 中的闭矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 的测度为 $(b - a)(d - c)$ 。

然而这其实是难以做到的，例如 S. Banach 和 A. Tarski^[4] 在 1924 年利用选择公理^②证明了如下事实：可将单位球 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 分成有限多块（事

^①所谓刚体变换 (rigid transformation)，即指保持距离不变的变换，也称作等距变换，它可由平移及正交变换生成。

^②选择公理 (axiom of choice) 是集合论中的一个重要公理，它说的是：若 $X = (S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 是一个集族，其中 $S_\lambda \neq \emptyset (\forall \lambda \in \Lambda)$ ，则存在 X 上的一个映射 f ，使得 $f(S_\lambda) \in S_\lambda (\forall \lambda \in \Lambda)$ 。也即是说存在一种方式，使得能够从每个 S_λ 中各选出一个元素。

实上, 5 块足矣), 这些块可通过刚体变换组合成 \mathbb{R}^3 中的两个单位球, 这被称作 Banach–Tarski 悖论 (Banach–Tarski paradox)。按照这一结论, 要么从单位球分出的有限多块中至少有一块没有测度, 要么以上五条结论不能全部成立。

因此我们面临着选择, 要么不要追求对 \mathbb{R}^n 的每个子集均定义测度, 要么删去上面 (1) ~ (5) 中的某些条件。我们通常选择第一种方式, 那就需要去考虑选择哪些集合来定义测度, 或者说在多大的范围内去定义测度的问题。这个问题没有统一的答案, 但是有两种方式可以应付绝大多数的应用, 一种是 Jordan 测度, 一种是 Lebesgue 测度。在本书中我们只关注前者, 而后者以及一般的测度理论将会在“实分析”课程中学习。

为了建立测度理论, 我们首先回忆一下在第八章引入定积分的概念时所提到的计算曲边梯形面积的方法, 在那里是利用若干小矩形来逼近曲边梯形。这启发我们首先去讨论矩形以及那些可表为矩形的并的集合的测度, 以此为基础再去进一步讨论一些更一般的集合的测度。

15.1.1 简单集合的测度

【定义 1.1】 设 I_j ($1 \leq j \leq n$) 是 \mathbb{R} 中的有界区间, 我们称 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ 为 \mathbb{R}^n 中的矩形 (rectangle)。如果 \mathbb{R}^n 的子集 E 可表为有限多个矩形的并, 则称 E 是 \mathbb{R}^n 中的简单集合 (elementary set)。

首先需要说明简单集合族在基本的集合运算下的封闭性。

【命题 1.2】 设 E, F 是 \mathbb{R}^n 中的简单集合, 则 $E \cup F, E \cap F, E \setminus F, E \Delta F$ 也均是 \mathbb{R}^n 中的简单集合。此外, 对任意的 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, E + \mathbf{a} = \{\mathbf{x} + \mathbf{a} : \mathbf{x} \in E\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的简单集合。

证明. 设

$$E = \bigcup_{i=1}^m Q_i, \quad F = \bigcup_{j=1}^k Q'_j,$$

其中 Q_i, Q'_j 均是矩形, 那么

$$E \cup F = \left(\bigcup_{i=1}^m Q_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^k Q'_j \right)$$

是简单集合。又由于

$$E \cap F = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^k (Q_i \cap Q'_j),$$

并且两个矩形的交仍是矩形, 故而 $E \cap F$ 是简单集合。

为了说明 $E \setminus F$ 是简单集合, 我们先证明两个矩形的差集必是简单集合。事实上, 若 $\mathcal{Q} = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ 与 $\mathcal{Q}' = I'_1 \times I'_2 \times \cdots \times I'_n$ 是两个矩形, 那么 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$ 当且仅当对每个 j 均有 $x_j \in I_j$ 并且存在 j 使得 $x_j \notin I'_j$, 因此

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}' &= \left((I_1 \setminus I'_1) \times I_2 \times \cdots \times I_n \right) \cup \left(I_1 \times (I_2 \setminus I'_2) \times \cdots \times I_n \right) \cup \cdots \\ &\quad \cup \left(I_1 \times I_2 \times \cdots \times (I_n \setminus I'_n) \right). \end{aligned}$$

注意到 \mathbb{R} 中两个区间的差必可写成一些区间的并, 从而上式右边每个括号内的集合均是简单集合, 于是 $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$ 也是简单集合。利用这一事实及

$$E \setminus F = \bigcap_{j=1}^k \left(\bigcup_{i=1}^m (\mathcal{Q}_i \setminus \mathcal{Q}'_j) \right)$$

便可推得 $E \setminus F$ 是简单集合。进而知 $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ 是简单集合。

最后, $E + \mathbf{a} = \bigcup_{i=1}^m (\mathcal{Q}_i + \mathbf{a})$, 而 $\mathcal{Q}_i + \mathbf{a}$ 是由 \mathcal{Q}_i 通过平移所得到的矩形, 故而 $E + \mathbf{a}$ 是简单集合。 \square

我们用 $|I|$ 来表示 \mathbb{R} 中的有限区间 I 的长度 (即该区间两端点之差)。如果 $\mathcal{Q} = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ 是 \mathbb{R}^n 中的一个矩形, 那么我们定义其体积 $|\mathcal{Q}|$ 为

$$|\mathcal{Q}| = \prod_{j=1}^n |I_j|.$$

由这个定义知, 对于每个矩形 \mathcal{Q} 有 $|\mathcal{Q}| = |\overline{\mathcal{Q}}|$ 。

【命题 1.3】 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的一个简单集合, 那么

- (1) E 可表为有限多个两两不相交的矩形的并;
- (2) 如果 E 可用如下两种方式写成互不相交的矩形的并

$$E = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{Q}_i = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{Q}'_j,$$

则

$$\sum_{i=1}^m |\mathcal{Q}_i| = \sum_{j=1}^k |\mathcal{Q}'_j|.$$

证明. (1) 首先讨论 $n = 1$ 的情形. 设 $E = I_1 \cup \cdots \cup I_m$. 现将 I_j ($1 \leq j \leq m$) 的端点按大小排序, 记作 $a_1 < a_2 < \cdots < a_\ell$. 那么

$$E = \left(\bigcup_{j=1}^{\ell-2} \left(E \cap [a_j, a_{j+1}) \right) \right) \cup \left(E \cap [a_{\ell-1}, a_\ell] \right)$$

就是将 E 写成两两不相交的区间的并的一种方式。

再讨论一般情形. 设 $E = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$, 其中 $Q_i = I_{i,1} \times \cdots \times I_{i,n}$ 是矩形. 对于 $1 \leq j \leq n$, 按照前面的讨论知可将 $I_{1,j} \cup \cdots \cup I_{m,j}$ 写成互不相交的区间 $J_{1,j}, \cdots, J_{k_j,j}$ 的并, 即

$$I_{1,j} \cup \cdots \cup I_{m,j} = J_{1,j} \cup \cdots \cup J_{k_j,j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

显然, 所有的矩形

$$J_{i_1,1} \times \cdots \times J_{i_n,n}, \quad 1 \leq i_j \leq k_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

两两不相交, 并且

$$E = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i_j=1}^{k_j} \left(E \cap (J_{i_1,1} \times \cdots \times J_{i_n,n}) \right),$$

从而 (1) 得证。

(2) 为方便起见, 我们把 E 表为有限多个两两不相交的矩形的并的方式称为 E 的划分. 可以证明: 对于 E 的任意两个划分而言, 存在一个比它们两个都“细”的划分. 在此基础上便可证明 (2), 具体过程可参见 [32] §8.5.

下面我们采用 [46] 中的更加漂亮简洁的证明, 它基于有理点集的稠密性. 对于实数 α 及 \mathbb{R}^n 的子集 A , 记 $\alpha A = \{\alpha \mathbf{x} : \mathbf{x} \in A\}$, 那么容易证明: 对 \mathbb{R} 中的任一有限区间 I 有

$$|I| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \# \left(I \cap \frac{1}{N} \mathbb{Z} \right), \quad (15.1)$$

其中 $\#$ 表示集合的元素个数. 于是对 \mathbb{R}^n 中的矩形 Q 有

$$|Q| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \cdot \# \left(Q \cap \frac{1}{N} \mathbb{Z}^n \right).$$

于是

$$\sum_{i=1}^m |Q_i| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \cdot \sum_{i=1}^m \# \left(Q_i \cap \frac{1}{N} \mathbb{Z}^n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^n} \cdot \# \left(E \cap \frac{1}{N} \mathbb{Z}^n \right) = \sum_{j=1}^k |Q'_j|.$$

从而命题得证. □

按照命题 1.3, 我们可以给出如下定义。

【定义 1.4】 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的一个简单集合, $E = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ 是 E 的一个划分, 则记

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^m |Q_i|,$$

并称之为 E 的测度 (measure)。

由定义知 μ 是定义在简单集合族上的非负函数, 且 $\mu(\emptyset) = 0$ 。此外, 因为对于每个矩形 Q 有 $|Q| = |\overline{Q}|$, 所以对于简单集合 E 也有

$$\mu(E) = \mu(\overline{E}).$$

下面我们来介绍简单集合测度的一些基本性质。

【命题 1.5】 设 E, F 均是 \mathbb{R}^n 中的简单集合, 则

- (1) (有限可加性) 若 $E \cap F = \emptyset$, 则 $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$;
- (2) (单调性) 若 $E \subseteq F$, 则 $\mu(E) \leq \mu(F)$;
- (3) (次可加性) $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$;
- (4) (平移不变性) 对任意的 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 有 $\mu(E + \mathbf{a}) = \mu(E)$ 。

证明. 由命题 1.2 知, 本命题中所涉及的集合均是简单集合。

(1) 设 $E = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ 与 $F = Q'_1 \cup \cdots \cup Q'_k$ 分别是 E 和 F 的划分, 由 $E \cap F = \emptyset$ 知

$$E \cup F = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m \cup Q'_1 \cup \cdots \cup Q'_k$$

是 $E \cup F$ 的一个划分, 于是

$$\mu(E \cup F) = \sum_{i=1}^m |Q_i| + \sum_{j=1}^k |Q'_j| = \mu(E) + \mu(F).$$

(2) 当 $E \subseteq F$ 时有 $F = E \cup (F \setminus E)$, 并且由命题 1.2 知 $F \setminus E$ 是简单集合, 因此利用 (1) 可得 $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$ 。

(3) 因为 $E \cup F = E \cup (F \setminus E)$, 并且这个式子右边的两个集合不相交, 所以由 (1) 和 (2) 可得

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \leq \mu(E) + \mu(F).$$

(4) 设 $E = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ 是 E 的一个划分, 则

$$E + \mathbf{a} = (Q_1 + \mathbf{a}) \cup \cdots \cup (Q_m + \mathbf{a}),$$

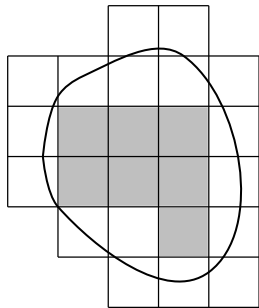
且上式右边的集合两两不相交, 注意到 $Q_j + \mathbf{a}$ 仍是矩形并且由矩形体积的定义不难验证 $|Q_j + \mathbf{a}| = |Q_j|$, 从而

$$\mu(E + \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m |Q_i + \mathbf{a}| = \sum_{i=1}^m |Q_i| = \mu(E).$$

□

15.1.2 Jordan 测度

现在我们已经对简单集合定义了测度, 但是简单集合的群体实在是太小了, 一方面, 甚至很多形状规则的区域都不是简单集合, 例如 \mathbb{R}^2 中由三角形围成的区域就不是简单集合; 另一方面, 简单集合族在刚体变换下不封闭, 例如 \mathbb{R}^2 中的矩形经过旋转变换后所得到的集合未必是简单集合。所以有必要对更多的集合来定义测度。现在我们面临的问题是: 应当选择哪些集合作为可定义测度的集合呢? 一个简单的想法是: 对于 \mathbb{R}^n 中给定的某个集合, 我们利用简单集合从外逼近和从内逼近这个集合 (如右图所示), 如果这两种逼近方式能达成一致, 那么这就是我们想要的集合。这一想法引出了下述定义。



【定义 1.6】 设 S 是 \mathbb{R}^n 中的有界集, 我们称由

$$\mu_*(S) = \sup\{\mu(A) : A \subseteq S \text{ 且 } A \text{ 是简单集合}\}$$

定义的 $\mu_*(S)$ 为 S 的 Jordan 内测度 (Jordan inner measure); 称由

$$\mu^*(S) = \inf\{\mu(B) : B \supseteq S \text{ 且 } B \text{ 是简单集合}\}$$

定义的 $\mu^*(S)$ 为 S 的 Jordan 外测度 (Jordan outer measure)。若 $\mu_*(S) = \mu^*(S)$, 则称 S 为 Jordan 可测集 (Jordan measurable set), 并将这一公共值记作 $\mu(S)$, 称之为 S 的 Jordan 测度 (Jordan measure) 或 容量 (content)。

如果 $\mu(S) = 0$, 则称 S 是 Jordan 零测集或零容量集。

当 $n = 1, 2, 3$ 时, Jordan 测度也被分别称作 长度 (length), 面积 (area) 和 体积 (volume)。

由上述定义可以立即看出简单集合必是 Jordan 可测集, 且其 Jordan 测度也即是定义 1.4 中所给出的简单集合的测度。此外, 对任一有界集 S 有

$$0 \leq \mu_*(S) \leq \mu^*(S). \quad (15.2)$$

因此 S 是 Jordan 零测集当且仅当 $\mu^*(S) = 0$ 。

下面我们给出 Jordan 可测的一些等价描述。

【定理 1.7】 设 S 是 \mathbb{R}^n 中的有界集, 则下列命题等价:

- (1) S 是 Jordan 可测集;
- (2) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在简单集合 A, B 满足 $A \subseteq S \subseteq B$ 以及 $\mu(B \setminus A) < \varepsilon$;
- (3) ∂S 为 Jordan 零测集。

证明. (1) \Rightarrow (2): 如果 S 是 Jordan 可测集, 那么由定义知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在简单集合 A, B 满足 $A \subseteq S \subseteq B$ 以及

$$\mu(A) > \mu(S) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu(B) < \mu(S) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

再由命题 1.5 (1) 便得 $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$ 。

(2) \Rightarrow (3): 对任意的 $\varepsilon > 0$, 由 (2) 知存在简单集合 A, B 满足 $A \subseteq S \subseteq B$ 以及 $\mu(B \setminus A) < \varepsilon$ 。注意到 A 和 B 都可以写成有限多个矩形的并, 而开矩形与其闭包具有相同的测度, 因此不妨假设 A 是开集, B 是闭集, 从而 $A \subseteq S^\circ \subseteq \bar{S} \subseteq B$ 。于是 $\partial S \subseteq B \setminus A$, 进而可得 $\mu^*(\partial S) = 0$, 这说明 ∂S 是 Jordan 零测集。

(3) \Rightarrow (1): 由 ∂S 是 Jordan 零测集知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在简单集合 E 使得 $\partial S \subseteq E$ 以及 $\mu(E) < \varepsilon$ 。注意到 E 可写成有限多个矩形的并, 因此我们可以把每个矩形适当地扩大成为一个开矩形, 并且使得所有的开矩形的测度之和 $< 2\varepsilon$ 。这意味着我们可以在一开始就认定 E 是开集。

此外, 对任意的 $\mathbf{x} \in S^\circ$, 存在开矩形 $Q_{\mathbf{x}}$ 使得 $\mathbf{x} \in Q_{\mathbf{x}} \subseteq S^\circ$, 于是利用 $\bar{S} = S^\circ \cup \partial S$ (参见第十二章命题 1.14) 可得

$$\bar{S} \subseteq E \cup \left(\bigcup_{\mathbf{x} \in S^\circ} Q_{\mathbf{x}} \right).$$

因为 \bar{S} 是紧集, 故从上式右边可以选出有限个集合覆盖 \bar{S} , 即存在 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in S^\circ$ 使得

$$\bar{S} \subseteq E \cup \left(\bigcup_{j=1}^m Q_{\mathbf{x}_j} \right). \quad (15.3)$$

现记

$$A = \bigcup_{j=1}^m Q_{\mathbf{x}_j}, \quad B = E \cup A,$$

那么 A, B 均是简单集合, 并且由 \mathcal{Q}_x 的选取方式及 (15.3) 知 $A \subseteq S^\circ \subseteq \bar{S} \subseteq B$. 于是

$$\mu^*(S) \leq \mu(B) \quad \text{且} \quad \mu_*(S) \geq \mu(A).$$

又由于 $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A) \leq \mu(E) < \varepsilon$, 所以

$$\mu^*(S) < \mu_*(S) + \varepsilon.$$

再由 ε 的任意性便知 $\mu^*(S) \leq \mu_*(S)$. 结合 (15.2) 即得 $\mu^*(S) = \mu_*(S)$, 因此 S 是 Jordan 可测集. \square

【例 1.8】 $S = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ 不是 \mathbb{R} 中的 Jordan 可测集, 这是因为由 $\partial S = [0, 1]$ 知 $\mu(\partial S) = 1$. 事实上可以证明 $\mu_*(S) = 0$, $\mu^*(S) = 1$ (参见习题 9).

下面给出 Jordan 可测集的一些性质.

【命题 1.9】 设 E, F 是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集, 则

- (1) $E \cup F, E \cap F, E \setminus F, E \Delta F$ 均是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集;
- (2) (有限可加性) 若 E 与 F 无公共内点, 则 $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$, 特别地, 这一式子当 $E \cap F = \emptyset$ 时成立;
- (3) (单调性) 若 $E \subseteq F$, 则 $\mu(E) \leq \mu(F)$;
- (4) (次可加性) $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$;
- (5) (平移不变性) 对任意的 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 有 $\mu(E + \mathbf{a}) = \mu(E)$.

证明. (1) 这四个集合的边界均是 $\partial E \cup \partial F$ 的子集 (参见 §12.1 习题 8), 故由定理 1.7 知它们均是 Jordan 可测集.

(2) 由于 E, F 均是 Jordan 可测集, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开的简单集合 A_1, A_2 满足 $A_1 \subseteq E, A_2 \subseteq F$ 以及

$$\mu(A_1) > \mu(E) - \varepsilon, \quad \mu(A_2) > \mu(F) - \varepsilon.$$

注意到 $E^\circ \cap F^\circ = \emptyset$, 从而 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 于是由命题 1.5 (1) 知

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) > \mu(E) + \mu(F) - 2\varepsilon.$$

因为 $A_1 \cup A_2 \subseteq E \cup F$, 所以

$$\mu_*(E \cup F) \geq \mu(E) + \mu(F) - 2\varepsilon.$$

再由 ε 的任意性便得 $\mu_*(E \cup F) \geq \mu(E) + \mu(F)$ 。

另一方面, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在简单集合 B_1, B_2 满足 $E \subseteq B_1, F \subseteq B_2$ 及

$$\mu(E) > \mu(B_1) - \varepsilon, \quad \mu(F) > \mu(B_2) - \varepsilon.$$

因为 $E \cup F \subseteq B_1 \cup B_2$, 故由命题 1.5 (3) 知

$$\mu^*(E \cup F) \leq \mu(B_1 \cup B_2) \leq \mu(B_1) + \mu(B_2) < \mu(E) + \mu(F) + 2\varepsilon.$$

再由 ε 的任意性可得 $\mu^*(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$ 。综合以上两方面结果以及 (15.2) 即得 $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$ 。

(3) 由 $F = E \cup (F \setminus E)$ 及 (2) 知 $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$ 。

(4) 由 (2), (3) 知 $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \leq \mu(E) + \mu(F)$ 。

(5) 因为简单集合经过平移后仍是简单集合, 所以 B 是一个包含 E 的简单集合当且仅当 $B + \mathbf{a}$ 是包含 $E + \mathbf{a}$ 的简单集合, 由此便得 $\mu^*(E + \mathbf{a}) = \mu^*(E)$ 。同理有 $\mu_*(E + \mathbf{a}) = \mu_*(E)$ 。因此 $E + \mathbf{a}$ 是 Jordan 可测集且 $\mu(E + \mathbf{a}) = \mu(E)$ 。□

上述命题中所给出的诸性质与我们的预期是一致的, 但还有一条没有证明, 那就是 Jordan 测度在正交变换下的不变性, 它被放在了引理 5.4 中。

命题 1.9 虽然提供了 Jordan 可测集的一些基本性质, 但并未形象地告诉我们哪些集合是 Jordan 可测的。我们其实很想知道平常所接触到的较为规则的几何体是否都是 Jordan 可测的, 而这正是目前需要解决的首要问题。

【命题 1.10】 设 F 是 \mathbb{R}^{n-1} 中的紧集, $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续函数, 那么集合

$$S = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in F\}$$

是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 零测集。

证明. 因为 F 有界, 故存在 \mathbb{R}^{n-1} 中的矩形 Q 使得 $F \subseteq Q$ 。又由命题条件知 f 在 F 上一致连续, 于是对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于 F 中满足 $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| < \delta$ 的任意两点 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 均有

$$|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| < \frac{\varepsilon}{\mu(Q)}.$$

现将 Q 划分成有限多个互不相交的子矩形 Q_1, \dots, Q_m , 使得每个子矩形的直径 $< \delta$ 。于是当 $Q_j \cap F \neq \emptyset$ 时, 由上式知

$$\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in Q_j\} \subseteq Q_j \times I_j,$$

其中 I_j 是 \mathbb{R} 中的某个长度为 $\frac{\varepsilon}{\mu(Q)}$ 的区间。于是

$$S \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq m}^* Q_j \times I_j,$$

这里 * 表示变量 j 满足 $Q_j \cap F \neq \emptyset$ 。并且

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{1 \leq j \leq m}^* Q_j \times I_j\right) &\leq \sum_{j=1}^m \mu(Q_j \times I_j) = \sum_{j=1}^m \mu(Q_j) \cdot \frac{\varepsilon}{\mu(Q)} \\ &= \frac{\varepsilon}{\mu(Q)} \cdot \mu(Q) = \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 S 是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 零测集。 □

【注 1.11】 (1) 在命题 1.10 的条件下, 类似可证集合

$$\{(x_1, \dots, x_{i-1}, f(\mathbf{x}), x_{i+1}, \dots, x_n) : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in F\} \quad (15.4)$$

也是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 零测集。

(2) 因为 (15.4) 中的集合也即是 \mathbb{R}^n 中的由连续函数 f 及显式方程

$$x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in F$$

所确定的曲面, 所以由定理 1.7 知, \mathbb{R}^n 中由有限多个如上式给出的曲面所围成的区域是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集, 这意味着许多常见的几何体 (例如平面上的多边形所围成的区域、空间中的多面体、 \mathbb{R}^n 中的球等等) 都是 Jordan 可测集。

或许有人会进一步地问: 如果 f 是一个从低维空间中的某紧集到高维空间的连续映射, 那么 f 的像集是否是高维空间中的 Jordan 零测集呢? 例如, 若 F 是 \mathbb{R}^{n-1} 中的紧集, $f = (f_1, \dots, f_n)^T : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个连续映射, 那么 $f(F)$ 是否一定是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 零测集呢? 这个问题的答案是否定的。以 $n = 2$ 的情形为例, 我们其实可以构造出连续满映射 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$, 此即著名的 Peano 曲线 (参见 §10.8 习题 9 ~ 11)。然而, 如果假设 f 是连续可微映射, 那么 $f(F)$ 必是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 零测集 (可参见定理 5.1 下面一段中的讨论)。

最后值得一提的是, Jordan 测度虽然很具体并且容易理解, 但它其实并不是一个令人很满意的测度。事实上, 有界的开集或闭集都未必是 Jordan 可测集 (参见习题 12)。

习题 15.1

1. 证明 (15.1)。
2. 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的一个简单集合。证明：对任意的 $\varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$ ，存在有限多个 \mathbb{R}^n 中的边长 $< \delta$ 的正方形（即各边长相等的矩形） Q_1, \dots, Q_k ，使得

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^k Q_i \quad \text{及} \quad \mu(E) > \sum_{i=1}^k |Q_i| - \varepsilon.$$

同样也存在有限多个 \mathbb{R}^n 中的边长 $< \delta$ 的正方形 Q'_1, \dots, Q'_ℓ ，使得

$$E \supseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} Q'_i \quad \text{及} \quad \mu(E) < \sum_{i=1}^{\ell} |Q'_i| + \varepsilon.$$

3. 证明上题结论对于 Jordan 可测集 E 也成立。
4. 设 E, F 均是 \mathbb{R}^n 中的有界集且 $E \subseteq F$ ，证明

$$\mu_*(E) \leq \mu_*(F) \quad \text{以及} \quad \mu^*(E) \leq \mu^*(F).$$

5. 设 S 是 \mathbb{R}^n 中的有界集，证明 S 是 Jordan 可测集的充要条件是：对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在 Jordan 可测集 E, F 满足 $E \subseteq S \subseteq F$ 以及 $\mu(F \setminus E) < \varepsilon$ 。
6. 证明：半径为 r 的圆的面积为 πr^2 。
7. 设 $E = \{n^{-1} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ ，证明 E 是 \mathbb{R} 中的 Jordan 零测集。
8. 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的有界集，并且 E 只有有限多个聚点，证明 $\mu(E) = 0$ 。
9. 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的有界集，证明 $\mu^*(E) = \mu^*(\overline{E})$ 以及 $\mu_*(E) = \mu_*(E^\circ)$ 。
10. 证明每个没有内点的 Jordan 可测集必是 Jordan 零测集。
11. 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的有界集，证明 $\mu^*(E) - \mu_*(E) \geq \mu^*(\partial E)$ 。
12. 把 $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ 中的元素排成一列，记作 $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ ，又令 $\varepsilon = \frac{1}{4}$ 。证明集合

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(a_m - \frac{\varepsilon}{2^m}, a_m + \frac{\varepsilon}{2^m} \right)$$

是 \mathbb{R} 中的一个 Jordan 不可测的开集，并由此构造出 \mathbb{R} 中的一个 Jordan 不可测的闭集。

13. 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的有界集，证明 E 是 Jordan 可测集的充要条件是：对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在 \mathbb{R}^n 中的简单集合 F 使得 $\mu^*(E \Delta F) < \varepsilon$ 。

14. 设 E 和 F 均是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集,

(1) 能否由 $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F)$ 成立推出 $F \subseteq \bar{E}$?

(2) 证明 $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F)$ 成立的充要条件是 $F^\circ \subseteq E$.

15. 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的有界集, F 是 \mathbb{R}^n 中的简单集合, 证明

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F).$$

16. 设 m 是一个给定的正整数, $f: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ 满足 $f(x) = \{mx\}$, 这里 $\{t\} = t - [t]$ 表示 t 的小数部分. 证明:

(1) 若 E 是一个简单集合且 $E \subseteq [0, 1)$, 则 $f^{-1}(E)$ 也是简单集合且

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E);$$

(2) 若 S 是 $[0, 1)$ 的一个 Jordan 可测子集, 则 $f^{-1}(S)$ 也是 Jordan 可测集且

$$\mu(f^{-1}(S)) = \mu(S).$$

§ 15.2

闭矩形上的积分

本章的目的是建立多元函数的 Riemann 积分理论, 我们将沿着与第八章类似的思路来进行. 这两者之间的主要差别在于: 一元的情形下积分区域是区间, 但对于多元的情形而言积分区域更为复杂. 因此为了便于类比, 我们在本节中先讨论积分区域为矩形的情况, 而把一般情况放到下一节讨论.

设 \mathcal{Q} 是 \mathbb{R}^n 中的一个闭矩形, 现将 \mathcal{Q} 写成 k 个无公共内点的闭子矩形的并 $\mathcal{Q} = \bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathcal{Q}_i$, 我们称 $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_k$ 构成了 \mathcal{Q} 的一个分划。

【定义 2.1】 设 \mathcal{Q} 是 \mathbb{R}^n 中的一个闭矩形, $f: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$. 如果存在实数 A , 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 其对 \mathcal{Q} 的满足 $\max_{1 \leq i \leq k} \text{diam}(\mathcal{Q}_i) < \delta$ 的任一分划

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{Q}_i$$

以及任意的 $\xi_i \in \mathcal{Q}_i$ ($1 \leq i \leq k$) 均有

$$\left| \sum_{i=1}^k f(\xi_i) |\mathcal{Q}_i| - A \right| < \varepsilon, \quad (15.5)$$

则称函数 f 在 Q 上 Riemann 可积, 简称可积。称 A 为 f 在矩形 Q 上的 Riemann 积分 或 n 重积分, 记作

$$A = \int_Q f, \quad (15.6)$$

也记作

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{或} \quad \int_Q \cdots \int_Q f(x_1, \cdots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n.$$

我们称 (15.5) 式中的求和为 Riemann 和, 分别称 (15.6) 式中的 Q 和 f 为 积分区域 和 被积函数。当 $n = 2$ 和 3 时, (15.6) 中的积分也分别被写成

$$\iint_Q f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{和} \quad \iiint_Q f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

类似于一元的情形, 我们可以得到可积性的下述必要条件。

【命题 2.2】 若 f 在 Q 上可积, 则 f 在 Q 上有界。

证明. 用 A 表示 f 在 Q 上的 Riemann 积分, 那么存在 $\delta > 0$, 使得对 Q 的满足 $\max_{1 \leq i \leq k} \text{diam}(Q_i) < \delta$ 的任一分划

$$Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i$$

以及任意的 $\xi_i \in Q_i$ ($1 \leq i \leq k$) 均有

$$\left| \sum_{i=1}^k f(\xi_i) |Q_i| - A \right| < 1.$$

这说明 Riemann 和 $\sum_{i=1}^k f(\xi_i) |Q_i|$ 有界。现固定 ξ_2, \cdots, ξ_k , 让 ξ_1 在 Q_1 中任意取值, 于是由 Riemann 和的有界性知 f 在 Q_1 上有界。同理可证 f 在 Q_i ($2 \leq i \leq k$) 上均有界, 因此 f 在 Q 上有界。□

为了进一步研究函数在矩形上的可积性, 我们仿照一元的情形给出 Darboux 上与 Darboux 下和的概念。

【定义 2.3】 设 Q 是 \mathbb{R}^n 中的矩形, f 是定义在 Q 上的有界函数。又设

$$\alpha: \quad Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i$$

是 Q 的一个分划。对 $1 \leq i \leq k$, 记

$$M_i = \sup\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in Q_i\}, \quad m_i = \inf\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in Q_i\}. \quad (15.7)$$

我们将

$$\overline{S}(\alpha) = \sum_{i=1}^k M_i |Q_i| \quad \text{与} \quad \underline{S}(\alpha) = \sum_{i=1}^k m_i |Q_i|$$

分别称为 Darboux 上和 (或简称为上和) 与 Darboux 下和 (或简称为下和), 统称为 Darboux 和。

【定义 2.4】 假设

$$\alpha : Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i \quad \text{与} \quad \beta : Q = \bigcup_{j=1}^{\ell} Q'_j$$

是矩形 Q 的两个分划。若对任意的 $i \in [1, k]$, 存在 $j \in [1, \ell]$ 使得 $Q_i \subseteq Q'_j$, 则称 α 比 β 细。

类似于第八章命题 2.2 和 2.3, 我们有

【命题 2.5】 设 α 和 β 是矩形 Q 的两个分划,

- (1) 如果 α 比 β 细, 则有 $\underline{S}(\beta) \leq \underline{S}(\alpha) \leq \overline{S}(\alpha) \leq \overline{S}(\beta)$;
- (2) $\underline{S}(\alpha) \leq \overline{S}(\beta)$ 。

因此, 集合 $\{\overline{S}(\alpha)\}$ 有下界, 从而有下确界; 集合 $\{\underline{S}(\alpha)\}$ 有上界, 从而有上确界。我们记

$$\overline{\int}_Q f = \inf\{\overline{S}(\alpha)\}, \quad \underline{\int}_Q f = \sup\{\underline{S}(\alpha)\},$$

并分别称它们为 Darboux 上积分和 Darboux 下积分 (或者分别将其简称为上积分和下积分)。显然, 对于 Q 的任一分划 α 有

$$\underline{S}(\alpha) \leq \underline{\int}_Q f \leq \overline{\int}_Q f \leq \overline{S}(\alpha). \quad (15.8)$$

【定理 2.6】 设 Q 是 \mathbb{R}^n 中的矩形, f 是定义在 Q 上的有界函数, 则下列命题等价:

- (1) f 在 Q 上 Riemann 可积;
- (2) $\underline{\int}_Q f = \overline{\int}_Q f$;

(3) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 Q 的分划 $Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i$ 使得

$$\sum_{i=1}^k \omega_i |Q_i| < \varepsilon,$$

其中 $\omega_i = M_i - m_i$ ($1 \leq i \leq k$) 是 f 在 Q_i 上的振幅 (这里的 M_i 与 m_i 如 (15.7) 所定义)。

证明. (1) \Rightarrow (2): 设 f 在 Q 上的积分为 A , 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于 Q 的满足 $\max_{1 \leq i \leq k} \text{diam}(Q_i) < \delta$ 的任一分划

$$\alpha: Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i$$

以及任意的 $\xi_i \in Q_i$ ($1 \leq i \leq k$) 均有

$$\left| \sum_{i=1}^k f(\xi_i) |Q_i| - A \right| < \varepsilon.$$

于是

$$0 \leq \bar{S}(\alpha) - \underline{S}(\alpha) \leq 2\varepsilon.$$

再利用 (15.8) 便得

$$0 \leq \int_Q f - \int_{\underline{Q}} f \leq 2\varepsilon.$$

进而由 ε 的任意性知 $\int_Q f = \int_{\underline{Q}} f$.

(2) \Rightarrow (3): 记 $A = \int_Q f = \int_{\underline{Q}} f$. 由上、下积分的定义知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 Q 的分划 β 及 γ 使得

$$\bar{S}(\beta) < A + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \underline{S}(\gamma) > A - \frac{\varepsilon}{2}.$$

现用 α 表示某个比 β 和 γ 都细的分划, 则由命题 2.5 知

$$\bar{S}(\alpha) \leq \bar{S}(\beta) < A + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{且} \quad \underline{S}(\alpha) \geq \underline{S}(\gamma) > A - \frac{\varepsilon}{2},$$

于是对于分划 α 而言有

$$\sum_{i=1}^k \omega_i |Q_i| = \bar{S}(\alpha) - \underline{S}(\alpha) < \varepsilon.$$

(3) \Rightarrow (1): 因为 f 在 \mathcal{Q} 上有界, 故存在 $M > 0$ 使得 $|f(\mathbf{x})| \leq M (\forall \mathbf{x} \in \mathcal{Q})$ 。现记 $A = \int_{\mathcal{Q}} f$ 。对任意的 $\varepsilon > 0$, 由 (3) 知存在 \mathcal{Q} 的分划

$$\alpha: \quad \mathcal{Q} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{Q}_i$$

使得

$$\overline{S}(\alpha) - \underline{S}(\alpha) < \varepsilon.$$

此外, 按照命题 2.5 (1) 以及下积分的定义, 可不妨设 α 同时满足

$$A - \varepsilon < \underline{S}(\alpha) \leq A. \quad (15.9)$$

现对充分小的 $\delta > 0$, 用 \mathcal{Q}'_i 表示将矩形 \mathcal{Q}_i 的每个侧面内缩 δ 距离后所得的矩形 (如右图所示), 并记

$$\mathcal{P}_\delta = \mathcal{Q} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{Q}'_i \right).$$

那么 $\mu(\mathcal{P}_\delta) = |\mu(\mathcal{Q})| - \sum_{i=1}^k |\mathcal{Q}'_i| \rightarrow 0$ (当 $\delta \rightarrow 0$ 时), 从而存在 δ 使得

$$\mu(\mathcal{P}_\delta) < \frac{\varepsilon}{M}.$$

现在考虑 \mathcal{Q} 的任一满足 $\max_{1 \leq j \leq \ell} \text{diam}(\mathcal{B}_j) < \delta$ 的分划

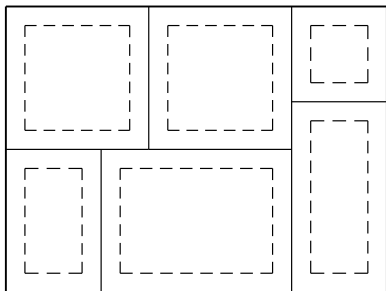
$$\mathcal{Q} = \bigcup_{j=1}^{\ell} \mathcal{B}_j,$$

那么每个 \mathcal{B}_j 要么在某个 \mathcal{Q}_i 内, 要么在 \mathcal{P}_δ 内 (也可能两者皆成立)。因此对任意的 $\xi_j \in \mathcal{B}_j$, Riemann 和可被拆成如下两个部分

$$\sum_{j=1}^{\ell} f(\xi_j) |\mathcal{B}_j| = \sum_1 + \sum_2,$$

其中 \sum_1 是对满足 $\mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{P}_\delta$ 的 j 进行求和, \sum_2 是对其余的 j 进行求和。一方面,

$$\left| \sum_1 \right| \leq M \cdot \mu(\mathcal{P}_\delta) < \varepsilon.$$



另一方面, 如果 \mathcal{B}_j 所对应的指标在 \sum_2 求和中, 则 \mathcal{B}_j 不包含于 \mathcal{P}_δ , 从而必与某个 Q'_i 相交, 再由 $\max_{1 \leq j \leq \ell} \text{diam}(\mathcal{B}_j) < \delta$ 知 $\mathcal{B}_j \subseteq Q_i$, 此外, \sum_2 求和中的全部 \mathcal{B}_j 的并必然将每个 Q'_i 覆盖, 于是

$$\left| \sum_2 - \underline{S}(\alpha) \right| \leq \bar{S}(\alpha) - \underline{S}(\alpha) + M \cdot \mu(\mathcal{P}_\delta) < 2\varepsilon.$$

综上便得

$$\left| \sum_{j=1}^{\ell} f(\xi_j) |\mathcal{B}_j| - \underline{S}(\alpha) \right| < 3\varepsilon,$$

再结合 (15.9) 即知

$$\left| \sum_{j=1}^{\ell} f(\xi_j) |\mathcal{B}_j| - A \right| < 4\varepsilon.$$

这就证明了 f 在 Q 上 Riemann 可积。 \square

当然, 利用定理 2.6 中的结论来判定函数在矩形上的 Riemann 可积性在很多时候是颇不方便的。为了给出更为方便的判别法, 我们引入 Lebesgue 零测集的概念。

【定义 2.7】 设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 。若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在至多可数个闭矩形 Q_i ($i = 1, 2, \dots$), 使得

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| < \varepsilon,$$

则称 S 为 \mathbb{R}^n 中的 Lebesgue 零测集。

【命题 2.8】

- (1) \mathbb{R}^n 中的至多可数集是 \mathbb{R}^n 中的 Lebesgue 零测集。
- (2) \mathbb{R}^n 中至多可数个 Lebesgue 零测集的并仍是 \mathbb{R}^n 中的 Lebesgue 零测集。

Lebesgue 零测集与 Jordan 零测集之间有如下关系, 我们将其证明留作习题。

【命题 2.9】

- (1) Jordan 零测集必是 Lebesgue 零测集。
- (2) 有界闭的 Lebesgue 零测集是 Jordan 零测集。

【注 2.10】 因为边界集必是闭集 (参见 §12.1 习题 11), 故由定理 1.7 知, \mathbb{R}^n 中的有界集 S 是 Jordan 可测集当且仅当 ∂S 是 Lebesgue 零测集。

与判定一元函数可积性的 Lebesgue 定理类似, 我们有下述结论, 其证明过程也与一元的情形相仿, 故而略去。

【定理 2.11】(Lebesgue) 设 Q 是 \mathbb{R}^n 中的矩形, 那么定义在 Q 上的有界函数 f 在 Q 上 Riemann 可积的充要条件是 f 的全体间断点构成 Lebesgue 零测集。

【推论 2.12】 设 Q 是 \mathbb{R}^n 中的矩形, f 在 Q 上可积。

(1) 如果 f 除了在一个 Lebesgue 零测集上以外均为 0, 则 $\int_Q f = 0$ 。

(2) 如果 f 非负且 $\int_Q f = 0$, 则 f 除了在一个 Lebesgue 零测集上以外均为 0。

证明. 证明过程与第八章命题 3.14 的证明类似, 我们把它留作习题。 \square

习题 15.2

1. 证明命题 2.5。

2. 证明命题 2.8。

3. 证明命题 2.9。

4. 证明推论 2.12。

5. 设 $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 是 \mathbb{R}^n 中的一个闭矩形, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ 。证明 f 在 Q 上可积且 $\int_Q f = A$ 的充要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对每个区间 $[a_j, b_j]$ 的满足 $\Delta x_j^{(i_j)} = x_j^{(i_j)} - x_j^{(i_j-1)} < \delta$ 的任一分划

$$a_j = x_j^{(0)} < x_j^{(1)} < \cdots < x_j^{(m_j)} = b_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

以及任意的 $\xi_{i_j} \in [x_j^{(i_j-1)}, x_j^{(i_j)}]$ ($1 \leq j \leq n, 1 \leq i_j \leq m_j$) 均有

$$\left| \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} f(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_n}) \Delta x_1^{(i_1)} \cdots \Delta x_n^{(i_n)} - A \right| < \varepsilon.$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $g(y)$ 在 $[c, d]$ 上可积。证明 $f(x)g(y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上可积且

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d g(y) dy \right).$$

7. 计算下列积分:

$$(1) \iint_{[0,1]^2} (x^3 + 1) \tan y dx dy;$$

$$(2) \iint_{[1,2]^2} \frac{\log y}{x^2} dx dy;$$

$$(3) \iint_{[0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \frac{\sin y}{1+x^2} dx dy;$$

$$(4) \iint_{[0,1] \times [0,2]} \frac{x|1-y|}{(1+x)^2} dx dy;$$

8. 设 Q 是 \mathbb{R}^n 中的一个闭矩形, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个有界函数, 且 f 在 Q 上不等于 0 的点构成一个闭的 Lebesgue 零测集. 证明 f 在 Q 上可积且 $\int_Q f = 0$.
9. 设 Q 是 \mathbb{R}^n 中的一个闭矩形, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$. 证明 f 在 Q 上可积且 $\int_Q f = A$ 的充要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 \mathbb{R}^n 中两两无公共内点的 Jordan 可测集 J_1, \dots, J_k 只要满足 $\max_{1 \leq i \leq k} \text{diam}(J_i) < \delta$ 以及

$$Q = \bigcup_{i=1}^k J_i,$$

就对任意的 $\xi_i \in J_i$ ($1 \leq i \leq k$) 有

$$\left| \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \mu(J_i) - A \right| < \varepsilon.$$

§ 15.3

有界集上的积分

设 E 是 \mathbb{R}^n 中的有界集, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. 我们通过定义下述 f_E 将 f 延拓为 \mathbb{R}^n 上的函数:

$$f_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{若 } \mathbf{x} \in E, \\ 0, & \text{若 } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E. \end{cases}$$

【引理 3.1】 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的有界集, f 是定义在 E 上的有界函数. 若 Q_1 与 Q_2 是包含 E 的两个闭矩形, 则 f_E 要么同时在这两个矩形上可积, 要么同时在这两个矩形上不可积. 并且当 f 同时在 Q_1 与 Q_2 上可积时有

$$\int_{Q_1} f_E = \int_{Q_2} f_E.$$

证明. 因为 $E \subseteq Q_1 \cap Q_2$, 而 $Q_1 \cap Q_2$ 也是矩形, 故不妨设 $Q_1 \subseteq Q_2$.

在此假设下 f_E 在 $Q_2 \setminus Q_1$ 上恒等于 0, 这说明 f_E 在 Q_2 上的不连续点也即是 f_E 在 Q_1 上的不连续点, 从而由 Lebesgue 定理知 f_E 在这两个矩形上要么同时可积, 要么同时不可积.

现设 f_E 在这两个矩形上均可积, 那么对于 Q_1 和 $Q_2 \setminus Q_1$ 的任一分划^③

$$Q_1 = \bigcup_{i=1}^k Q'_i \quad \text{与} \quad Q_2 \setminus Q_1 = \bigcup_{i=k+1}^{\ell} Q'_i,$$

由 $Q_1 \subseteq Q_2$ 知

$$Q_2 = \bigcup_{i=1}^{\ell} Q'_i$$

是 Q_2 的一个分划。但注意到 f_E 在 $Q_2 \setminus Q_1$ 上恒等于 0, 因此对任意的 $\xi_i \in Q'_i$ 有

$$\sum_{i=1}^k f_E(\xi_i) |Q'_i| = \sum_{i=1}^{\ell} f_E(\xi_i) |Q'_i|.$$

这意味着在这种特殊的分划下, f_E 在 Q_1 上的 Riemann 和与其在 Q_2 上的 Riemann 和相等, 从而

$$\int_{Q_1} f_E = \int_{Q_2} f_E.$$

□

这一引理保证了下述定义的合理性。

【定义 3.2】 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的有界集, f 是定义在 E 上的有界函数, Q 是 \mathbb{R}^n 中包含 E 的某个闭矩形。如果 f_E 在 Q 上可积, 则称 f 在 E 上可积, 记

$$\int_E f = \int_Q f_E,$$

并称之为 f 在 E 上的 Riemann 积分。

【命题 3.3】 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的有界集, f 与 g 在 E 上可积, 则

- (1) $af + bg$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$), fg 以及 $|f|$ 均在 E 上可积。若 f 在 E 上不等于 0 且 $1/f$ 在 E 上有界, 那么 $1/f$ 也在 E 上可积。
- (2) 对任意的 $a, b \in \mathbb{R}$ 有

$$\int_E (af + bg) = a \int_E f + b \int_E g.$$

- (3) 若对任意的 $x \in E$ 均有 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

^③ 因为 $Q_2 \setminus Q_1$ 是简单集合, 故而也可将其写成一些没有公共内点的闭矩形的并。

特别地,

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

(4) 若 $F \subseteq E$, f 在 F 上可积, 且 f 在 E 上非负, 则

$$\int_F f \leq \int_E f.$$

证明. 设 Q 是 \mathbb{R}^n 中包含 E 的一个闭矩形, 那么 f_E 与 g_E 均在 Q 上可积。

(1) 用 D_{f_E} 表示 f_E 在 Q 上的全体间断点所成之集, 则

$$D_{(af+bg)_E} = D_{af_E+bg_E} \subseteq D_{f_E} \cup D_{g_E},$$

$$D_{(fg)_E} = D_{f_E g_E} \subseteq D_{f_E} \cup D_{g_E},$$

$$D_{|f|_E} = D_{|f_E|} \subseteq D_{f_E}.$$

此外, 当 f 在 E 上不等于 0 且 $1/f$ 在 E 上有界时, 对任意的 $\mathbf{a} \in \partial E$ 有

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in E}} f(\mathbf{x}) \neq 0,$$

这意味着 E 的边界点同时是 f_E 和 $(1/f)_E$ 的间断点, 因此 $D_{(1/f)_E} = D_{f_E}$ 。综上, 由 Lebesgue 定理知结论成立。

(2) 只需证

$$\int_Q (af_E + bg_E) = a \int_Q f_E + b \int_Q g_E,$$

而这可由定义 2.1 直接得出。

(3) 因为对任意的 $\mathbf{x} \in Q$ 均有 $g_E(\mathbf{x}) - f_E(\mathbf{x}) \geq 0$, 故由 $g_E - f_E$ 所对应的 Riemann 和的非负性知

$$\int_Q (g_E - f_E) \geq 0.$$

再利用 (2) 便得 $\int_Q g_E \geq \int_Q f_E$, 这就证明了第一式。第二式可由 $-|f| \leq f \leq |f|$ 得到。

(4) 这是因为对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 有 $f_F(\mathbf{x}) \leq f_E(\mathbf{x})$ 。 □

【命题 3.4】 设 E 和 F 是 \mathbb{R}^n 中的两个有界集, f 在 E 和 F 上均可积, 那么 f 在 $E \cup F$ 及 $E \cap F$ 上也可积, 且有

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f - \int_{E \cap F} f. \quad (15.10)$$

特别地, 如果 $\mu(E \cap F) = 0$, 则

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f. \quad (15.11)$$

证明. 设 Q 是包含 $E \cup F$ 的一个闭矩形, 则 f_E 与 f_F 均在 Q 上可积。

先考虑 f 是非负函数的情况。由于对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 有

$$f_{E \cup F} = \max(f_E, f_F) = \frac{f_E + f_F + |f_E - f_F|}{2},$$

$$f_{E \cap F} = \min(f_E, f_F) = \frac{f_E + f_F - |f_E - f_F|}{2},$$

故由命题 3.3 (1) 知 $f_{E \cup F}$ 与 $f_{E \cap F}$ 也均在 Q 上可积, 从而 f 在 $E \cup F$ 及 $E \cap F$ 上可积。

对于一般的函数 f , 记

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2}, \quad f^- = \frac{|f| - f}{2},$$

则由 f 在 E 和 F 上均可积知 f^+ 和 f^- 均在 E 和 F 上可积。注意到 f^+ 与 f^- 皆非负, 所以由上一段知 f^+ 和 f^- 均在 $E \cup F$ 及 $E \cap F$ 上可积, 进而由

$$f = f^+ - f^-$$

知 f 在 $E \cup F$ 和 $E \cap F$ 上可积。

此外, 容易验证

$$f_{E \cup F} + f_{E \cap F} = f_E + f_F,$$

于是在 Q 上积分即得 (15.10)。

为了证明 (15.11), 我们提前使用下面命题 3.6 中的结论。因为 f 在 $E \cap F$ 上可积, 故它在 $E \cap F$ 上有界, 即存在 $M > 0$ 使得对任意的 $\mathbf{x} \in E \cap F$ 有 $|f(\mathbf{x})| \leq M$ 。于是

$$\left| \int_{E \cap F} f \right| \leq M \cdot \int_{E \cap F} 1 = M \cdot \mu(E \cap F) = 0.$$

至此, 命题得证。 □

命题 3.4 的一个重要的特殊情形是 E 与 F 为两个无公共内点的 Jordan 可测集且 f 在 E 和 F 上均可积, 此时 $E \cap F \subseteq \partial E \cap \partial F$, 从而由 $\mu(\partial E) = \mu(\partial F) = 0$ 知 $\mu(E \cap F) = 0$, 因此在这种情况下必有 (15.11) 成立。

在一般情况下, f 在 $E \cup F$ 上可积是不能保证 f 在 E 或 F 上可积的, 但是当 E 与 F 均是 Jordan 可测集时这却是成立的, 我们把这留作习题。

因为我们平时所遇到的集合大多都是 Jordan 可测集, 因此接下来我们的讨论都将限制在 Jordan 可测集上。

【定理 3.5】(Lebesgue) 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集, f 是定义在 E 上的有界函数, 那么 f 在 E 上可积当且仅当它在 E 上的全体间断点构成 \mathbb{R}^n 中的 Lebesgue 零测集。

证明. 设 Q 是一个包含 E 的矩形, 则 f 在 E 上可积当且仅当 f_E 在 Q 上可积, 但 f_E 与 f 相比, 只可能在 ∂E 上多出新的间断点, 而由 E 是 Jordan 可测集知 $\mu(\partial E) = 0$, 因此由定理 2.11 可立即得出本定理的结论。□

【命题 3.6】 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集, 则

$$\int_E 1 = \mu(E).$$

证明. 设 Q 是一个包含 E 的矩形, 并用 χ_E 表示集合 E 的特征函数。因为

$$\overline{\int}_Q \chi_E = \mu^*(E), \quad \underline{\int}_Q \chi_E = \mu_*(E),$$

故由 E 的 Jordan 可测性知 χ_E 在 Q 上可积且

$$\int_Q \chi_E = \mu(E),$$

从而命题得证。□

【定理 3.7】(积分中值定理) 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集, f 与 g 在 E 上可积且 g 在 E 上不变号。现记 $m = \inf_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})$, $M = \sup_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})$, 那么存在 $\kappa \in [m, M]$ 使得

$$\int_E fg = \kappa \cdot \int_E g.$$

特别地, 存在 $\lambda \in [m, M]$ 使得

$$\int_E f = \lambda \cdot \mu(E).$$

证明. 不妨设 g 在 E 上非负, 于是对任意的 $\boldsymbol{x} \in E$ 有

$$mg(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) \leq Mg(\boldsymbol{x}).$$

从而由命题 3.3 的 (2) 和 (3) 知

$$m \int_E g \leq \int_E fg \leq M \int_E g.$$

因此存在 $\kappa \in [m, M]$ 使得

$$\int_E fg = \kappa \cdot \int_E g.$$

这就证明了第一个式子。特别地, 取 g 为恒等于 1 的函数, 结合命题 3.6 可得第二个式子。□

【推论 3.8】 设 E 是 \mathbb{R}^n 中既紧且连通的 Jordan 可测集, f 在 E 上连续, g 在 E 上可积且不变号, 则存在 $\boldsymbol{\xi} \in E$ 使得

$$\int_E fg = f(\boldsymbol{\xi}) \cdot \int_E g.$$

特别地, 存在 $\boldsymbol{\eta} \in E$ 使得

$$\int_E f = f(\boldsymbol{\eta}) \cdot \mu(E).$$

证明. 这可由定理 3.7 及连续函数的介值定理 (第十二章推论 3.11) 得到。□

习题 15.3

1. 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的有界集, f 与 g 均在 E 上可积, 证明 $\max(f, g)$ 与 $\min(f, g)$ 也在 E 上可积。
2. 设 E 与 F 均是 \mathbb{R}^n 中的有界集, 且 f 在 $E \cup F$ 上可积。
 - (1) 举例说明 f 未必在 E 或 F 上可积。
 - (2) 如果 E 和 F 均是 Jordan 可测集, 证明 f 在 E 和 F 上均可积。
3. 设 S 如 §15.1 习题 12 所定义, 证明恒等于 1 的函数在 S 上不可积。
4. 设 E 与 F 均是 \mathbb{R}^n 中的有界集, 且 f 在 E 和 F 上均可积, 证明 f 在 $E \setminus F$ 上可积且

$$\int_{E \setminus F} f = \int_E f - \int_{E \cap F} f.$$

5. 设 A, B 均是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集,

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \mathbf{x} \in B, \\ 0, & \text{若 } \mathbf{x} \in A \setminus B. \end{cases}$$

问 f 是否在 A 上可积?

6. (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的有界集, f 与 g 均在 E 上可积, 证明

$$\left| \int_E fg \right|^2 \leq \left(\int_E f^2 \right) \cdot \left(\int_E g^2 \right).$$

7. 设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且在 $(0, 0)$ 处连续, 计算

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^2} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

8. 记

$$I = \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dx \, dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y},$$

证明 $1.96 \leq I \leq 2$.

9. 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集且 $\mu(E) > 0$, f 在 E 上可积且对任意的 $\mathbf{x} \in E$ 有 $f(\mathbf{x}) > 0$. 证明

$$\int_E f > 0.$$

§ 15.4

Fubini 定理

在接下来的两节中我们将介绍计算重积分的两个重要方法, 一个是将重积分化为累次积分, 另一个是变量替换。在本节中我们讨论前者, 其基本思想是将重积分化为一些低维的积分, 反复利用这一过程就可可在一定条件下将重积分化为一系列一元积分, 从而可用定积分的计算方法来处理。

我们首先讨论积分区域是矩形的情况。

【定理 4.1】(Fubini 定理) 设 $Q = Q_1 \times Q_2$ 是 \mathbb{R}^n 中的闭矩形, 其中 Q_1 和 Q_2 分别是 \mathbb{R}^k 和 \mathbb{R}^ℓ 中的闭矩形且 $k + \ell = n$. 又设 f 在 Q 上可积. 若将 f 写成 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的形式, 其中 $\mathbf{x} \in Q_1$, $\mathbf{y} \in Q_2$, 那么

$$\overline{\int_{Q_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}} \quad \text{与} \quad \underline{\int_{Q_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}}$$

作为 \mathbf{x} 的函数均在 Q_1 上可积, 且有

$$\int_Q f = \int_{Q_1} \left(\overline{\int_{Q_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}} \right) d\mathbf{x} = \int_{Q_1} \left(\underline{\int_{Q_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}} \right) d\mathbf{x}. \quad (15.12)$$

上式中后两个积分被称为累次积分 (iterated integral)。

证明. 为方便起见, 记

$$I(\mathbf{x}) = \underline{\int_{Q_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}}, \quad J(\mathbf{x}) = \overline{\int_{Q_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}}.$$

因为 f 在 Q 上可积, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 Q 的一个分划, 我们不妨将其记作

$$Q = \bigcup_{i=1}^s \bigcup_{j=1}^t Q_{1,i} \times Q_{2,j},$$

其中

$$Q_1 = \bigcup_{i=1}^s Q_{1,i} \quad \text{与} \quad Q_2 = \bigcup_{j=1}^t Q_{2,j}$$

分别是 Q_1 与 Q_2 的分划, 使得

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t (M_{i,j} - m_{i,j}) |Q_{1,i} \times Q_{2,j}| < \varepsilon, \quad (15.13)$$

上式中

$$M_{i,j} = \sup_{\mathbf{x} \in Q_{1,i}, \mathbf{y} \in Q_{2,j}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad m_{i,j} = \inf_{\mathbf{x} \in Q_{1,i}, \mathbf{y} \in Q_{2,j}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

按照下积分的定义,

$$\begin{aligned} \underline{\int_{Q_1} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} &\geq \sum_{i=1}^s \left(\inf_{\mathbf{x} \in Q_{1,i}} I(\mathbf{x}) \right) \cdot |Q_{1,i}| \\ &\geq \sum_{i=1}^s \left(\inf_{\mathbf{x} \in Q_{1,i}} \sum_{j=1}^t \left(\inf_{\mathbf{y} \in Q_{2,j}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \cdot |Q_{2,j}| \right) \cdot |Q_{1,i}| \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t m_{i,j} |\mathcal{Q}_{1,i}| \cdot |\mathcal{Q}_{2,j}| = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t m_{i,j} |\mathcal{Q}_{1,i} \times \mathcal{Q}_{2,j}|.$$

类似可证

$$\overline{\int_{\mathcal{Q}_1} I(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}} \leq \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t M_{i,j} |\mathcal{Q}_{1,i} \times \mathcal{Q}_{2,j}|.$$

因此由 (15.13) 知

$$0 \leq \overline{\int_{\mathcal{Q}_1} I(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}} - \int_{\underline{\mathcal{Q}}_1} I(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < \varepsilon,$$

这说明 $I(\mathbf{x})$ 在 \mathcal{Q}_1 上可积。同时注意到

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t m_{i,j} |\mathcal{Q}_{1,i} \times \mathcal{Q}_{2,j}| \leq \int_{\mathcal{Q}} f \leq \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t M_{i,j} |\mathcal{Q}_{1,i} \times \mathcal{Q}_{2,j}|,$$

所以

$$\int_{\mathcal{Q}} f = \int_{\mathcal{Q}_1} I(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

同理可证 $J(\mathbf{x})$ 在 \mathcal{Q}_1 上可积且其积分等于 $\int_{\mathcal{Q}} f$. □

(15.12) 中的后两个积分也常常分别被写成

$$\int_{\mathcal{Q}_1} d\mathbf{x} \overline{\int_{\mathcal{Q}_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}} \quad \text{及} \quad \int_{\mathcal{Q}_1} d\mathbf{x} \int_{\underline{\mathcal{Q}}_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

的形式。

必须注意的是，不能把 (15.12) 写成

$$\int_{\mathcal{Q}} f = \int_{\mathcal{Q}_1} \left(\int_{\mathcal{Q}_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

这是因为尽管 f 在 \mathcal{Q} 上可积，但对给定的 $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}_1$ 而言 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 未必在 \mathcal{Q}_2 上可积，也即是说，上式右边的内侧积分未必存在。例如函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x = 1, y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

在 $[0, 2]^2$ 上可积，但是 $f(1, y)$ 作为 y 的函数在 $[0, 2]$ 上不可积。然而，使得 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 在 \mathcal{Q}_2 上不可积的那些 \mathbf{x} 并不会太多，参见习题 9。

利用有界闭矩形上的连续函数的可积性，我们可以立即得到如下推论。

【推论 4.2】 如果 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续, 那么

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

下面来讨论积分区域是更一般的集合的情况。假设 F 是 \mathbb{R}^{n-1} 中有界闭的 Jordan 可测集, φ 与 ψ 是定义在 F 上的两个连续函数, 且对任意的 $\mathbf{x} \in F$ 有 $\varphi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x})$, 那么集合

$$E = \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in F, y \in [\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})]\} \quad (15.14)$$

是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集。为了说明这一点, 只需证明 $\mu(\partial E) = 0$ 即可。事实上,

$$\begin{aligned} \partial E \subseteq & \{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in F\} \cup \{(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in F\} \\ & \cup \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in \partial F \text{ 且 } y \in [\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})]\}. \end{aligned} \quad (15.15)$$

由命题 1.10 知上式右边前两个集合均是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 零测集。对于最后一个集合而言, 一方面由 φ 和 ψ 的连续性知, 存在 $M > 0$ 使得对任意的 $\mathbf{x} \in F$ 有

$$-M \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x}) \leq M;$$

另一方面, 由 F 的 Jordan 可测性知 $\mu(\partial F) = 0$, 从而对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在矩形 $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_k$ 使得

$$\partial F \subseteq \bigcup_{i=1}^k \mathcal{Q}_i \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^k |\mathcal{Q}_i| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

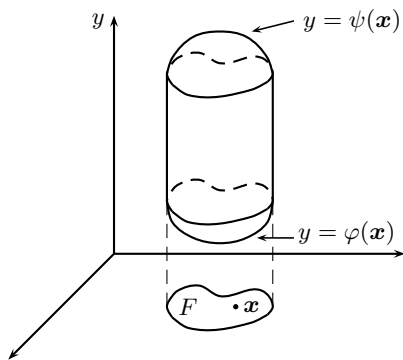
于是 (15.15) 右边第三个集合包含于

$$\bigcup_{i=1}^k \mathcal{Q}_i \times [-M, M],$$

并且

$$\sum_{i=1}^k |\mathcal{Q}_i \times [-M, M]| = \sum_{i=1}^k |\mathcal{Q}_i| \cdot 2M < \varepsilon.$$

综上便知 $\mu(\partial E) = 0$ 。



【定理 4.3】(Fubini 定理) 设 F 是 \mathbb{R}^{n-1} 中有界闭的 Jordan 可测集, φ 与 ψ 是定义在 F 上的两个连续函数, 并且对任意的 $\mathbf{x} \in F$ 有 $\varphi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x})$. 记

$$E = \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in F, y \in [\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})]\}.$$

又设 $f(\mathbf{x}, y)$ 在 E 上连续, 则

$$\int_E f = \int_F d\mathbf{x} \int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, y) dy.$$

证明. 设 Q_1 是 \mathbb{R}^{n-1} 中包含 F 的一个闭矩形. 由 φ 和 ψ 在紧集 F 上的连续性知, 存在 $M > 0$ 使得对任意的 $\mathbf{x} \in F$ 有

$$-M \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x}) \leq M,$$

因此 $Q = Q_1 \times [-M, M]$ 是 \mathbb{R}^n 中包含 E 的一个矩形.

因为 E 是 Jordan 可测集, 所以由连续性假设知 f 在 E 上可积, 且对每个给定的 $\mathbf{x} \in F$ 而言 $f_E(\mathbf{x}, y)$ 在 $[-M, M]$ 上可积, 故由定理 4.1 知

$$\int_E f = \int_Q f_E = \int_{Q_1} d\mathbf{x} \int_{-M}^M f_E(\mathbf{x}, y) dy.$$

注意到上式右边内侧积分当 $\mathbf{x} \notin F$ 时均等于 0, 故而

$$\int_E f = \int_F d\mathbf{x} \int_{-M}^M f_E(\mathbf{x}, y) dy = \int_F d\mathbf{x} \int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, y) dy.$$

□

【例 4.4】 设 E 是 \mathbb{R}^2 中由直线 $y = x$ 和抛物线 $y = x^2$ 所围成的闭区域 (如右图所示), 试计算

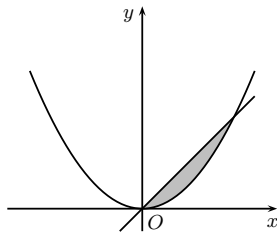
$$I = \iint_E (x^2 + y) dx dy.$$

解. 由于

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [x^2, x]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], x \in [y, \sqrt{y}]\}, \end{aligned}$$

因此在利用 Fubini 定理时, 如果先对 y 后对 x 积分, 则有

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y) dy = \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{7}{60}.$$



如果先对 x 后对 y 积分, 则有

$$I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (x^2 + y) dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}y^3 - y^2 \right) dy = \frac{7}{60}.$$

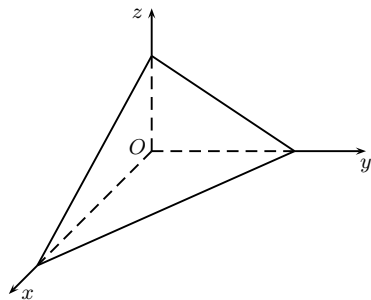
□

【例 4.5】 设 E 是 \mathbb{R}^3 中由三个坐标面和平面 $x + 2y + 3z = 1$ 所围成的闭区域, 计算

$$I = \iiint_E x^2 dx dy dz.$$

解. 易见

$$E = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + 2y + 3z \leq 1\},$$



因此由 Fubini 定理知

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^2 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{\frac{1-x-2y}{3}} dz \\ &= \int_0^1 x^2 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} \frac{1-x-2y}{3} dy = \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{12} dx = \frac{1}{360}. \end{aligned}$$

□

【例 4.6】 (n 维单形的 Jordan 测度) 设 $a > 0$, 我们称 \mathbb{R}^n 的子集

$$\Delta_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \geq 0 (1 \leq j \leq n), x_1 + \dots + x_n \leq a\}$$

为 n 维单形 (simplex)。那么

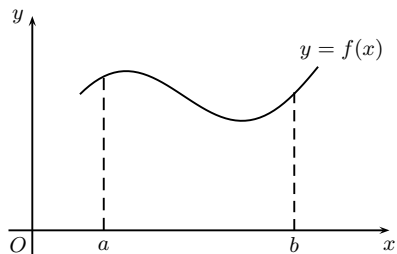
$$\begin{aligned} \mu(\Delta_n(a)) &= \int_{\Delta_n(a)} 1 = \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n \\ &= \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-2}} (a-x_1-\dots-x_{n-2}-x_{n-1}) dx_{n-1} \\ &= \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-3}} \frac{1}{2}(a-x_1-\dots-x_{n-3}-x_{n-2}) dx_{n-2} \\ &= \cdots = \int_0^a \frac{1}{(n-1)!} (a-x_1)^{n-1} dx_1 = \frac{a^n}{n!}. \end{aligned}$$

最后, 作为 Fubini 定理的应用, 我们来讨论一些特殊平面图形的面积和高维空间几何体的体积。

【命题 4.7】 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且非负，那么曲边梯形

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$$

的面积为 $\int_a^b f(x) dx$ 。



证明. 由命题 1.10 知 S 是 \mathbb{R}^2 中的 Jordan 可测集，此外，

$$\mu(S) = \int_S 1 = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x) dx.$$

□

【命题 4.8】 假设 $n \geq 2$, V 是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集，且其含于矩形 $Q = [-M, M]^n$ 内。对任意的 $x_n \in \mathbb{R}$ ，记

$$V_{x_n} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) : (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in V\}. \quad (15.16)$$

若对任意的 $x_n \in [-M, M]$ 而言 V_{x_n} 均是 \mathbb{R}^{n-1} 中的 Jordan 可测集，那么 V 的 Jordan 测度为

$$\int_{-M}^M \mu(V_{x_n}) dx_n,$$

上式中的 $\mu(V_{x_n})$ 是 V_{x_n} 在 \mathbb{R}^{n-1} 中的 Jordan 测度。

证明. 用 χ_V 表示 V 的特征函数，那么 V_{x_n} 可测意味着 $\chi_V(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ 在 $[-M, M]^{n-1}$ 上对前 $n-1$ 个变量可积，于是由 Fubini 定理知

$$\begin{aligned} \int_V 1 &= \int_Q \chi_V = \int_{-M}^M dx_n \int_{[-M, M]^{n-1}} \chi_V(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\ &= \int_{-M}^M dx_n \int_{V_{x_n}} dx_1 \cdots dx_{n-1} = \int_{-M}^M \mu(V_{x_n}) dx_n. \end{aligned}$$

□

由这一命题可立即得到下述著名结论。

【定理 4.9】 (祖暅原理^④) 设 $n \geq 2$, A 与 B 是 \mathbb{R}^n 中的两个 Jordan 可测集。

^④祖暅原理原载于祖暅与其父祖冲之所著《缀术》一书中，该书现已失传，但是唐朝李淳风在其所注《九章算术》“少广”章中引用了这一原理：“缘幂势既同，则积不容异”。它的意思是：对两个立体作与底平行的截面，如果每个对应的截面面积均相同，那么这两个立体的体积相等。这也就是本推论 $n=3$ 的情形。祖暅原理在国外被称作 Cavalieri 原理。

对 $x_n \in \mathbb{R}$, 设 A_{x_n} 与 B_{x_n} 如 (15.16) 一般定义。如果对任意的 $x_n \in \mathbb{R}$, A_{x_n} 与 B_{x_n} 均在 \mathbb{R}^{n-1} 中 Jordan 可测且有相同的测度, 那么 A 与 B 的 Jordan 测度相同。

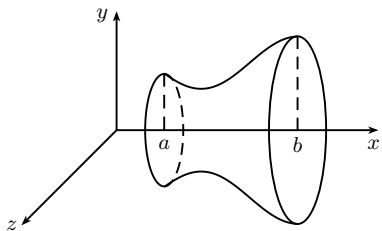
【例 4.10】(旋转体的体积) 假设函数 f :

$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 非负且连续, 证明由平面闭区域

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$$

绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积为

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$



证明. 用 V 表示这一旋转体。在 (15.16) 的记号下, 我们知道对任意的 $x \in [a, b]$, V_x 是一个半径为 $f(x)$ 的圆, 其面积为 $\pi f(x)^2$ ^⑤, 从而由命题 4.8 知结论成立。□

习题 15.4

1. 假设 f 在积分区域上连续, 试交换下列积分的次序:

$$(1) \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x, y) dy;$$

$$(2) \int_{-1}^1 dx \int_{x^2+x}^{x+1} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz;$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz.$$

2. 设 $f(x, y)$ 在 $[0, a]^2$ 上连续, 证明 Dirichlet 公式

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx.$$

3. 计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \iint_{[0, n]^2} ([x] + [y]) dx dy,$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

^⑤圆的面积已在 §15.1 习题 6 中计算过, 当然也可直接用命题 4.7 来计算, 此外还可参见下节的注 5.14。

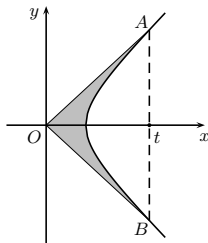
4. 计算下列平面图形的面积:

(1) 由 $xy = a^2$ 和 $x + y = \frac{5}{2}a$ ($a > 0$) 所围成的有界闭区域;

(2) 由 $y^2 = 2px + p^2$ ($p > 0$) 和 $y^2 = -2qx + q^2$ ($q > 0$) 所围成的有界闭区域;

(3) 由 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) 所围成的有界闭区域。

5. 设 $t > 1$, 证明双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上两点 $A(t, \sqrt{t^2 - 1})$, $B(t, -\sqrt{t^2 - 1})$ 之间的曲线段与线段 OA , OB 所围成的闭区域的面积为 $\cosh^{-1}t$ ⑥。



6. 计算下列立体的体积:

(1) 由 $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$ 和 $y = x^2$ 所围成的有界闭区域;

(2) 由 $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$ 和 $y = 0$ 所围成的有界闭区域。

7. 计算下列旋转体的体积:

(1) 平面闭区域 $\{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, x^{\frac{2}{3}}]\}$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体;

(2) 平面上的圆 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 绕直线 $y = b$ ($b > a > 0$) 旋转所得的旋转体。

8. 利用 Fubini 原理计算下列重积分:

(1) $\iint_D xy^2 dx dy$, 其中 D 是由 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 和 $x = \frac{p}{2}$ 所围成的有界闭区域;

(2) $\iint_D (x + 2y) dx dy$, 其中 D 是由 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 在第一象限内的曲线段和 $y = 2 - 2x$ 所围成的有界闭区域;

(3) $\iint_D x^{p-1}y^{q-1} dx dy$ ($p, q \geq 1$), 其中 D 是由 $x + y = 1$ 和两个坐标轴所围成的有界闭区域;

(4) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}$, 其中 V 是由 $x + y + z = 1$ 和三个坐标平面所围成的有界闭区域。

9. 设 $Q = Q_1 \times Q_2$ 是 \mathbb{R}^n 中的闭矩形, 其中 Q_1 和 Q_2 分别是 \mathbb{R}^k 和 \mathbb{R}^ℓ 中的闭矩形且 $k + \ell = n$ 。又设 f 在 Q 上可积, 证明: 使得 $f(x, y)$ 在 Q_2 上关于变量 y 不可积的那些 $x \in Q_1$ 构成 \mathbb{R}^k 中的 Lebesgue 零测集。

⑥面积的英文是 area, 这导致人们常使用这一单词的前两个字母而将 \cosh^{-1} 写成 arcosh, 其它的反双曲函数也有类似的书写方式 (参见第一章脚注 4)。

10. 设 E 是 \mathbb{R}^2 中的开集且 $f \in C^2(E)$, 利用 Fubini 定理证明: 对任意的 $\mathbf{a} \in E$ 有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a})$.
11. 把每个有理数 x 写成既约分数 $\frac{p_x}{q_x}$ 的形式, 其中 $q_x > 0$, 并在正方形 $Q = [0, 1]^2$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x \text{ 与 } y \text{ 均是有理数且 } q_x = q_y, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

证明:

(1) f 在 Q 上的两个累次积分

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx \quad \text{与} \quad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$$

均存在且相等;

(2) f 在 Q 上处处不连续, 从而在 Q 上不可积.

§ 15.5

变量替换

15.5.1 启发式的讨论

变量替换是重积分计算中的一个重要方法, 在一些时候我们可以利用变量替换将积分区域简化, 从而对计算带来极大的便利。我们首先在二维的情况下通过一个启发式的讨论来看看重积分的变量替换应该具有什么样的形式。

设 G 是 \mathbb{R}^2 中的一个有界开集, $\varphi: G \rightarrow \varphi(G)$ 是一个连续可微的双射, E 是 \mathbb{R}^2 中的一个 Jordan 可测集且 $\bar{E} \subseteq G$ 。又设 f 在 $\varphi(E)$ 上可积。我们来计算积分

$$\int_{\varphi(E)} f.$$

现设 Q 是一个包含 $\varphi(E)$ 的矩形, 为了方便起见, 我们只讨论一个简单情形, 即假设 $Q \subseteq \varphi(G)$, 那么上述积分也即

$$\int_Q f_{\varphi(E)}.$$

对于 Q 的任一分划

$$Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i$$

考虑相应的 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^k f_{\varphi(E)}(\xi_i) |\mathcal{Q}_i|,$$

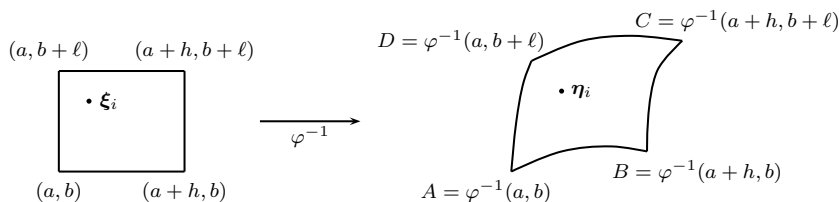
其中 $\xi_i \in \mathcal{Q}_i$ ($1 \leq i \leq k$)。由于 φ 是双射, 故存在唯一的 $\eta_i \in \varphi^{-1}(\mathcal{Q}_i)$ 使得 $\varphi(\eta_i) = \xi_i$, 于是

$$\sum_{i=1}^k f_{\varphi(E)}(\xi_i) |\mathcal{Q}_i| = \sum_{i=1}^k f_{\varphi(E)} \circ \varphi(\eta_i) |\mathcal{Q}_i|. \quad (15.17)$$

因为 $\eta_i \in \varphi^{-1}(\mathcal{Q}_i)$, 所以为了使得上式右边成为一个类似于 Riemann 和的式子, 我们需要将 $|\mathcal{Q}_i|$ 用 $\mu(\varphi^{-1}(\mathcal{Q}_i))$ 表示出来 (在这里我们不加证明地认定 $\varphi^{-1}(\mathcal{Q}_i)$ 是 Jordan 可测集, 严格的推导会在本小节结束时给出)。为此, 假设对任意的 $u \in G$ 而言 $\varphi'(u)$ 均是非奇异的, 那么由反函数定理知 φ^{-1} 连续可微并且对任意的 $z \in \varphi(G)$ 有

$$(\varphi^{-1})'(z) = \varphi'(\varphi^{-1}(z))^{-1}. \quad (15.18)$$

假设 \mathcal{Q}_i 是以 (a, b) , $(a+h, b)$, $(a, b+\ell)$, $(a+h, b+\ell)$ 为顶点的矩形, 它在 φ^{-1} 的作用下变成了一个“曲边四边形” $ABCD$ (如下图所示)。利用带 Peano 余项的 Taylor 公式可得



$$\overrightarrow{AB} = \varphi^{-1}(a+h, b) - \varphi^{-1}(a, b) = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x}(a, b)h + o(|h|),$$

$$\overrightarrow{AD} = \varphi^{-1}(a, b+\ell) - \varphi^{-1}(a, b) = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y}(a, b)\ell + o(|\ell|),$$

$$\overrightarrow{DC} = \varphi^{-1}(a+h, b+\ell) - \varphi^{-1}(a, b+\ell) = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x}(a, b+\ell)h + o(|h|),$$

$$\overrightarrow{BC} = \varphi^{-1}(a+h, b+\ell) - \varphi^{-1}(a+h, b) = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y}(a+h, b)\ell + o(|\ell|),$$

因此当 $|h|$ 和 $|\ell|$ 都充分小时, 由 $\varphi^{-1} \in C^1(G)$ 知可将“曲边四边形” $ABCD$ 近似看作以向量 $\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x}(a, b)h$ 和 $\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y}(a, b)\ell$ 为相邻边所形成的平行四边形, 所以 $\varphi^{-1}(\mathcal{Q}_i)$

的面积也近似等于这一平行四边形的面积。若记 $\varphi^{-1} = (g_1, g_2)^T$, 那么

$$\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x}(a, b) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g_2}{\partial x}(a, b) \right)^T,$$

$$\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y}(a, b) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}(a, b), \frac{\partial g_2}{\partial y}(a, b) \right)^T.$$

从而以 $\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x}(a, b)h$ 和 $\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y}(a, b)\ell$ 为邻边的平行四边形的面积也即

$$\begin{aligned} \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial g_2}{\partial x}(a, b) \\ \frac{\partial g_1}{\partial y}(a, b) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} \right| \cdot |h\ell| &= |\det(\varphi^{-1})'(a, b)| \cdot |Q_i| \\ &= |\det \varphi'(\varphi^{-1}(a, b))|^{-1} \cdot |Q_i|, \end{aligned}$$

上面最后一步用到了 (15.18)。注意到 $\boldsymbol{\eta}_i$ 位于“曲边四边形”内, 因此当 $|h|$ 和 $|\ell|$ 充分小时 $\varphi^{-1}(a, b)$ 与 $\boldsymbol{\eta}_i$ 很接近, 再结合 $\varphi \in C^1(G)$ 便得

$$\mu(\varphi^{-1}(Q_i)) \approx |\det \varphi'(\boldsymbol{\eta}_i)|^{-1} \cdot |Q_i|,$$

也即

$$|Q_i| \approx |\det \varphi'(\boldsymbol{\eta}_i)| \cdot \mu(\varphi^{-1}(Q_i)).$$

将这代入 (15.17) 即得

$$\sum_{i=1}^k f_{\varphi(E)}(\boldsymbol{\xi}_i) |Q_i| \approx \sum_{i=1}^k f_{\varphi(E)} \circ \varphi(\boldsymbol{\eta}_i) |\det \varphi'(\boldsymbol{\eta}_i)| \cdot \mu(\varphi^{-1}(Q_i)). \quad (15.19)$$

上式右边在通常情况下并不是一个 Riemann 和 (因为 $\varphi^{-1}(Q_i)$ 未必是矩形), 但是由于诸 $\varphi^{-1}(Q_i)$ 两两无公共内点, 并且

$$E \subseteq \varphi^{-1}(Q) \subseteq \bigcup_{i=1}^k \varphi^{-1}(Q_i),$$

因此我们有足够的理由相信当 $\max_{1 \leq i \leq k} \text{diam}(Q_i)$ 充分小时 (15.19) 右边的和式可以与以 $f_{\varphi(E)} \circ \varphi(x, y) \cdot |\det \varphi'(x, y)|$ 为被积函数的积分非常接近, 于是把 (15.19) 两边的求和分别用积分代替便得

$$\int_{\varphi(E)} f = \int_E (f \circ \varphi) |\det \varphi'|.$$

此即二重积分的变量替换公式。

上面的讨论使我们感觉到对于 n 重积分也应当有如下类似的结论。

【定理 5.1】 设 G 是 \mathbb{R}^n 中的有界开集, $\varphi: G \rightarrow \varphi(G)$ 是一个连续可微的双射, 并且对任意的 $\mathbf{x} \in G$ 而言 $\varphi'(\mathbf{x})$ 均是非奇异的. 又设 E 是 \mathbb{R}^n 中的一个 Jordan 可测集且 $\overline{E} \subseteq G$. 如果 f 在 $\varphi(E)$ 上可积, 那么

$$\int_{\varphi(E)} f = \int_E (f \circ \varphi) |\det \varphi'|. \quad (15.20)$$

我们暂时把它的证明留到下一小节, 而在这里先讨论一下 (15.20) 右侧积分的存在性问题. 因为 $\varphi'(\mathbf{x})$ 对任意的 $\mathbf{x} \in G$ 而言均是非奇异的, 故由反函数定理知 φ 将开集映为开集. 进而由 φ 是双射知

$$\partial\varphi(E) = \varphi(\partial E), \quad (15.21)$$

下面我们来考察 $\varphi(\partial E)$. 由于 ∂E 是闭集, 所以存在开集 G_1 满足 $\partial E \subseteq G_1 \subseteq \overline{G_1} \subseteq G$, 于是由 φ 的连续可微性及 (12.1) 知 $M = \sup_{\mathbf{z} \in \overline{G_1}} \|\varphi'(\mathbf{z})\|$ 是一个正实数. 此外, 因为 E 是 Jordan 可测集, 所以 $\mu(\partial E) = 0$, 从而对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在闭矩形 Q'_1, \dots, Q'_ℓ 满足

$$\partial E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} Q'_i \subseteq G_1$$

以及

$$\sum_{i=1}^{\ell} |Q'_i| < \varepsilon,$$

按照 §15.1 习题 2, 我们不妨假设 Q'_i 均为正方形. 由有限增量定理 (第十三章定理 3.2) 知, 对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q'_i$,

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| \leq M \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq M \cdot \text{diam } Q'_i.$$

因此 $\varphi(Q'_i)$ 必包含在某个 Jordan 测度 $\leq (\sqrt{n}M)^n |Q'_i|$ 的正方形内. 从而 $\varphi(\partial E)$ 被有限多个正方形覆盖, 且这些正方形的 Jordan 测度之和

$$\leq (\sqrt{n}M)^n \sum_{i=1}^{\ell} |Q'_i| < (\sqrt{n}M)^n \varepsilon.$$

这样就证明了 $\varphi(\partial E)$ 是 Jordan 零测集, 于是由 (15.21) 知 $\varphi(E)$ 是 Jordan 可测集. 注意到 φ 是连续的双射, 所以利用 Lebesgue 定理 (定理 3.5) 便可从 (15.20) 左侧积分的存在性推出右侧积分的存在性.

我们将上面讨论的结果总结如下:

【命题 5.2】 设 G 是 \mathbb{R}^n 中的有界开集, $\varphi: G \rightarrow \varphi(G)$ 是一个连续可微的双射, 并且对任意的 $\mathbf{x} \in G$ 而言 $\varphi'(\mathbf{x})$ 均非奇异. 如果 E 是 \mathbb{R}^n 中的一个 Jordan 可测集且 $\overline{E} \subseteq G$, 那么 $\varphi(E)$ 也是 Jordan 可测集.

15.5.2 主要定理的证明

本小节的目的是证明定理 5.1, 但是我们并不打算严格按照上一小节的思路来进行, 因此在给出证明之前, 我们先审视上面的讨论过程并总结一下推导不严格的地方以及困难所在.

首先, 为了方便起见, 我们曾假设矩形 Q 满足 $\varphi(E) \subseteq Q \subseteq \varphi(G)$, 但事实上在一般情况下这样的矩形 Q 是不存在的, 从直观上看, 为了越过这一困难我们可以把 $\varphi(E)$ 分成若干小块, 对每个小块重复上一小节中的讨论, 之后再各小块“拼接”起来. 其次, 在计算 $\mu(\varphi^{-1}(Q_i))$ 时我们将其近似于某个平行四边形的面积, 这是一个推导不严格的地方, 如果要将这一步骤严格化, 我们实质上需要证明

$$\mu(\varphi^{-1}(Q_i)) = \int_{Q_i} |\det(\varphi^{-1})'|,$$

而这正是定理 5.1 对应于 $f = 1$ 的特殊情形. 最后, 在上一小节中我们也提到了 (15.19) 右边的和式未必是 Riemann 和, 要去说明这一和式本质上起到了与 Riemann 和相同的作用是需要付出一定的努力的 (此即 §15.2 习题 9).

总之, 为了证明定理 5.1, 我们的做法是在上一小节的思路的基础上采取一定的迂回. 在此之前, 先做一些准备工作.

【引理 5.3】 设 Q 是 \mathbb{R}^n 中的一个矩形, $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个初等变换, 为了方便起见, 我们仍用 L 表示其在标准基下的矩阵, 那么 $L(Q)$ 是 Jordan 可测的且

$$\mu(L(Q)) = |\det L| \cdot |Q|.$$

证明. 因为 Jordan 测度具有平移不变性, 故不妨设 $\mathbf{0}$ 是 Q 的一个顶点, 即

$$Q = [0, a_1] \times \cdots \times [0, a_n]$$

(如果某个 a_j 是负数, 那么上述记号中的 $[0, a_j]$ 也即是区间 $[a_j, 0]$).

众所周知初等变换共有三种, 对给定的 $1 \leq i, j \leq n$ ($i \neq j$) 及实数 $\rho \neq 0$, 我们将这三种变换分别记作 $P_{i,j}$, $D_{i,\rho}$ 与 $H_{i,j}$, 它们满足

$$P_{i,j}(\mathbf{e}_k) = \begin{cases} \mathbf{e}_k, & \text{若 } k \neq i, j, \\ \mathbf{e}_j, & \text{若 } k = i, \\ \mathbf{e}_i, & \text{若 } k = j. \end{cases} \quad D_{i,\rho}(\mathbf{e}_k) = \begin{cases} \mathbf{e}_k, & \text{若 } k \neq i, \\ \rho \mathbf{e}_i, & \text{若 } k = i. \end{cases}$$

以及

$$H_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_k, & \text{若 } k \neq i, \\ e_i + e_j, & \text{若 } k = i. \end{cases}$$

它们在标准基下所对应的矩阵分别为三类初等矩阵, 行列式分别为 $\det P_{i,j} = -1$, $\det D_{i,\rho} = \rho$, $\det H_{i,j} = 1$ 。

首先,

$$P_{i,j}(\mathcal{Q}) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_k \in [0, a_k] (k \neq i, j), x_i \in [0, a_j], x_j \in [0, a_i]\}$$

是一个矩形, 因此 $P_{i,j}\mathcal{Q}$ 是 Jordan 可测的且

$$\mu(P_{i,j}(\mathcal{Q})) = |a_1 \cdots a_n| = |\det P_{i,j}| \cdot |\mathcal{Q}|.$$

其次,

$$D_{i,\rho}(\mathcal{Q}) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_k \in [0, a_k] (k \neq i), x_i \in [0, \rho a_j]\}$$

也是一个矩形, 因此 $D_{i,\rho}\mathcal{Q}$ 是 Jordan 可测的且

$$\mu(D_{i,\rho}(\mathcal{Q})) = |\rho| \cdot |a_1 \cdots a_n| = |\det D_{i,\rho}| \cdot |\mathcal{Q}|.$$

最后, 由命题 5.2 知 $H_{i,j}(\mathcal{Q})$ 是 Jordan 可测集^⑦。下面不妨设 $i < j$ 。因为

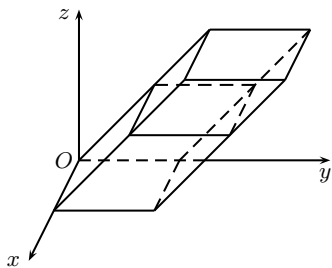
$$H_{i,j}(\mathcal{Q}) = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \dots, x_n) : x_k \in [0, a_k] (1 \leq k \leq n)\},$$

所以如果我们沿用 (15.16) 中的记号, 则对任意的 $x_j \in [0, a_j]$ 有

$$\begin{aligned} & (H_{i,j}(\mathcal{Q}))_{x_j} \\ &= \{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) : x_k \in [0, a_k] (k \neq j)\} \\ &= \mathcal{Q}_{x_j} + x_j \cdot e_i^*, \end{aligned}$$

其中 e_i^* 是 \mathbb{R}^{n-1} 中的第 i 个单位向量。这说明 $(H_{i,j}(\mathcal{Q}))_{x_j}$ 可由矩形 \mathcal{Q}_{x_j} 通过平移得到 (右图给出了三维空间中 $x_j = z$, $x_i = y$ 的情形), 从而 $\mu((H_{i,j}(\mathcal{Q}))_{x_j}) = \mu(\mathcal{Q}_{x_j})$, 于是由祖暅原理 (定理 4.9) 知

$$\mu(H_{i,j}(\mathcal{Q})) = \mu(\mathcal{Q}) = |\det H_{i,j}| \cdot |\mathcal{Q}|.$$



□

^⑦ $H_{i,j}(\mathcal{Q})$ 的 Jordan 可测性也可由命题 1.10 推出。

【引理 5.4】 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集, $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个非奇异的线性变换, 将其在标准基下的矩阵仍记作 L , 那么 $L(E)$ 也是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测集, 并且

$$\mu(L(E)) = |\det L| \cdot \mu(E). \quad (15.22)$$

特别地, 若 L 是正交变换, 那么 $\mu(L(E)) = \mu(E)$ 。

证明. $L(E)$ 的 Jordan 可测性虽然可以直接由命题 5.2 得到, 但我们也可按下述方式来证明。

首先讨论 L 是初等变换的情况。对任意的 $\varepsilon > 0$, 由 E 是 Jordan 可测集知存在简单集合 A, B 使得 $A \subseteq E \subseteq B$ 且 $\mu(B \setminus A) < \frac{\varepsilon}{|\det L|}$ 。现将 A 与 B 写成两两无公共内点的闭矩形的并,

$$A = \bigcup_{i=1}^k Q_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{\ell} Q'_j.$$

那么

$$L(A) = \bigcup_{i=1}^k L(Q_i), \quad L(B) = \bigcup_{j=1}^{\ell} L(Q'_j),$$

并且由 L 是双射知诸 $L(Q_i)$ ($1 \leq i \leq k$) 两两无公共内点, 诸 $L(Q'_j)$ ($1 \leq j \leq \ell$) 亦两两无公共内点。按照引理 5.3, $L(Q_i)$ ($1 \leq i \leq k$) 与 $L(Q'_j)$ ($1 \leq j \leq \ell$) 均是 Jordan 可测集, 从而 $L(A)$ 与 $L(B)$ 也是 Jordan 可测集, 并且

$$\mu(L(A)) = \sum_{i=1}^k \mu(L(Q_i)) = \sum_{i=1}^k |\det L| \cdot |Q_i| = |\det L| \cdot \mu(A), \quad (15.23)$$

$$\mu(L(B)) = \sum_{j=1}^{\ell} \mu(L(Q'_j)) = \sum_{j=1}^{\ell} |\det L| \cdot |Q'_j| = |\det L| \cdot \mu(B).$$

进而有 $L(A) \subseteq L(E) \subseteq L(B)$ 以及

$$\begin{aligned} \mu(L(B) \setminus L(A)) &= \mu(L(B)) - \mu(L(A)) = |\det L| \cdot (\mu(B) - \mu(A)) \\ &= |\det L| \cdot \mu(B \setminus A) < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此由 §15.1 习题 5 知 $L(E)$ 是 Jordan 可测集。注意到我们可以选择 A, B 使它们的 Jordan 测度任意接近 $\mu(E)$, 于是由 (15.23) 中的两式以及上式知

$$\mu(L(E)) = |\det L| \cdot \mu(E).$$

这就对初等变换证明了引理结论。

此外, 如果非奇异线性变换 L_1 与 L_2 均可将任一 Jordan 可测集映为 Jordan 可测集, 且有 (15.22) 成立, 那么 $L_1 \circ L_2$ 也可将任一 Jordan 可测集映为 Jordan 可测集, 并且

$$\begin{aligned}\mu(L_1 \circ L_2(E)) &= |\det L_1| \cdot \mu(L_2(E)) = |\det L_1| \cdot |\det L_2| \cdot \mu(E) \\ &= |\det L_1 L_2| \cdot \mu(E).\end{aligned}$$

再注意到每个非奇异线性变换均可写成初等变换的复合, 因此引理得证。□

有了以上准备工作, 我们可以来证明定理 5.1 了。首先将其重述如下:

【定理 5.1】 设 G 是 \mathbb{R}^n 中的有界开集, $\varphi: G \rightarrow \varphi(G)$ 是一个连续可微的双射, 并且对任意的 $\mathbf{x} \in G$ 而言 $\varphi'(\mathbf{x})$ 均是非奇异的。又设 E 是 \mathbb{R}^n 中的一个 Jordan 可测集且 $\bar{E} \subseteq G$ 。如果 f 在 $\varphi(E)$ 上可积, 那么

$$\int_{\varphi(E)} f = \int_E (f \circ \varphi) |\det \varphi'|.$$

在这里, 我们基本上采用 [32] 中的思路。证明分以下五步进行。

(1) 首先对满足 $\bar{S} \subseteq G$ 的 Jordan 可测集 S 证明

$$\mu(\varphi(S)) \leq \int_S |\det \varphi'|. \quad (15.24)$$

选择开集 G_1 满足 $\bar{S} \subseteq G_1 \subseteq \bar{G}_1 \subseteq G$ 。由 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ 的连续可微性及 $\varphi'(\mathbf{x})$ ($\forall \mathbf{x} \in G$) 的非奇异性知: 一方面, 存在 $M > 0$, 使得对任意的 $\mathbf{x} \in \bar{G}_1$ 而言, φ 在 \mathbf{x} 处的 Jacobi 矩阵的逆矩阵的元素之绝对值均不超过 M ; 另一方面, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于 \bar{G}_1 中满足 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$ 的任意两点 \mathbf{x}, \mathbf{y} 以及任意的 $1 \leq i, j \leq n$ 均有

$$\left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathbf{y}) \right| < \varepsilon. \quad (15.25)$$

因为 S 是 Jordan 可测集, 所以我们可以选择 G_1 内的两两无公共内点的闭正方形 $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_k$ 满足 $\text{diam } \mathcal{Q}_\ell < \delta$ ($1 \leq \ell \leq k$),

$$S \subseteq \bigcup_{\ell=1}^k \mathcal{Q}_\ell \quad \text{以及} \quad \sum_{\ell=1}^k |\mathcal{Q}_\ell| < \mu(S) + \varepsilon \quad (15.26)$$

(参见 §15.1 习题 3)。对任意的 ℓ ，由 φ 的连续可微性知，存在 $\mathbf{q}_\ell \in \mathcal{Q}_\ell$ 使得

$$|\det \varphi'(\mathbf{q}_\ell)| = \min_{\mathbf{z} \in \mathcal{Q}_\ell} |\det \varphi'(\mathbf{z})|. \quad (15.27)$$

为方便起见，记 $L = \varphi'(\mathbf{q}_\ell)$ ，并记映射 $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^\top$ 满足 $\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) - L\mathbf{x}$ 。那么

$$\psi'(\mathbf{x}) = \varphi'(\mathbf{x}) - L = \varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{q}_\ell).$$

于是由 (15.25) 知，对任意的 $\mathbf{z} \in \mathcal{Q}_\ell$ 及任意的 $1 \leq i, j \leq n$ 有

$$\left| \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\mathbf{z}) \right| = \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathbf{z}) - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathbf{q}_\ell) \right| < \varepsilon.$$

回忆起 §13.2 推论 2.10，便知对 \mathcal{Q}_ℓ 中任意两点 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ， $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ 以及任意的 j ，存在 $\mathbf{c} \in \mathcal{Q}_\ell$ 使得

$$\begin{aligned} |\psi_j(\mathbf{x}) - \psi_j(\mathbf{y})| &= |\psi'_j(\mathbf{c})(\mathbf{x} - \mathbf{y})| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\mathbf{c})(x_i - y_i) \right| \\ &< n\varepsilon \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|. \end{aligned} \quad (15.28)$$

注意到在证明一开始提到的 $L^{-1} = \varphi'(\mathbf{p}_\ell)^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵的元素的绝对值均不超过 M ，故而对 \mathcal{Q}_ℓ 中任意两点 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ， $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ 以及任意的 j ，由 (15.28) 及 (12.1) 可得

$$|(L^{-1} \circ \psi)_j(\mathbf{x}) - (L^{-1} \circ \psi)_j(\mathbf{y})| < n^2 M \varepsilon \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$$

其中 $(L^{-1} \circ \psi)_j$ 表示映射 $L^{-1} \circ \psi$ 的第 j 个分量函数。因为

$$L^{-1} \circ \psi(\mathbf{x}) = L^{-1} \circ \varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{x},$$

所以由三角形不等式可得

$$|(L^{-1} \circ \varphi)_j(\mathbf{x}) - (L^{-1} \circ \varphi)_j(\mathbf{y})| < (1 + n^2 M \varepsilon) \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$$

这意味着 $L^{-1} \circ \varphi(\mathcal{Q}_\ell)$ 必然包含在某个 Jordan 测度 $\leq (1 + n^2 M \varepsilon)^n \cdot |\mathcal{Q}_\ell|$ 的正方形内，从而

$$\mu(L^{-1} \circ \varphi(\mathcal{Q}_\ell)) \leq (1 + n^2 M \varepsilon)^n \cdot |\mathcal{Q}_\ell|.$$

因此由引理 5.4 知

$$\mu(\varphi(\mathcal{Q}_\ell)) = \mu(L \circ L^{-1} \circ \varphi(\mathcal{Q}_\ell)) = |\det L| \cdot \mu(L^{-1} \circ \varphi(\mathcal{Q}_\ell))$$

$$\leq (1 + n^2 M \varepsilon)^n |\det \varphi'(\mathbf{q}_\ell)| \cdot |\mathcal{Q}_\ell|.$$

于是由 (15.26) 中的第一个式子可得

$$\mu(\varphi(S)) \leq \sum_{\ell=1}^k \mu(\varphi(\mathcal{Q}_\ell)) \leq (1 + n^2 M \varepsilon)^n \sum_{\ell=1}^k |\det \varphi'(\mathbf{q}_\ell)| \cdot |\mathcal{Q}_\ell|.$$

再注意到 (15.27), 我们就有

$$\begin{aligned} \mu(\varphi(S)) &\leq (1 + n^2 M \varepsilon)^n \sum_{\ell=1}^k \int_{\mathcal{Q}_\ell} |\det \varphi'| = (1 + n^2 M \varepsilon)^n \int_{\bigcup_{1 \leq \ell \leq k} \mathcal{Q}_\ell} |\det \varphi'| \\ &= (1 + n^2 M \varepsilon)^n \left(\int_S |\det \varphi'| + \int_{\left(\bigcup_{1 \leq \ell \leq k} \mathcal{Q}_\ell\right) \setminus S} |\det \varphi'| \right) \\ &\leq (1 + n^2 M \varepsilon)^n \left(\int_S |\det \varphi'| + \varepsilon \cdot \sup_{z \in \overline{G_1}} |\det \varphi'(z)| \right), \end{aligned}$$

上面最后一步用到了 (15.26) 中的第二式, 从而由 ε 的任意性知 (15.24) 成立。

至此我们已经完成了证明的第一步, 但在继续进行之前, 我们先对上述过程略作评述。从本质上看, 这一步骤是在寻求 $\mu(\varphi(S))$ 与 $\mu(S)$ 之间的联系, 在上一小节的讨论中我们已经意识到这是证明变量替换定理中至关重要的一步。如果 φ 是非奇异的线性映射, 那么引理 5.4 已经建立这两者之间的联系了。但是当 φ 不是线性映射时该怎么办呢? 我们的处理方式是用有限多个小正方形去逼近 S , 然后在每个小正方形 \mathcal{Q}_ℓ 上相应地构造映射 $\psi = \varphi - L$, 并说明在 \mathcal{Q}_ℓ 上 ψ 几乎是个常值映射 (参见 (15.28) 式), 这其实是在局部用一个平移变换与线性变换 L 的复合去逼近 φ 。这种局部线性化的思想在以前我们就多次用到过, 它贯穿了整个微积分学的始终。

此外, 一个值得读者进一步思考的问题是: 为什么我们在这里做估计的时候都是在各分量函数上进行的, 而不像在证明命题 5.2 时 (参见定理 5.1 下面一段) 直接使用有限增量定理?

(2) 其次, 我们来对含于 G 内的闭矩形 \mathcal{Q} 以及在 \mathcal{Q} 上非负且可积的函数 f 证明

$$\int_{\mathcal{Q}} f \leq \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{Q})} (f \circ \varphi) |\det \varphi'|. \quad (15.29)$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 设 $\mathcal{Q} = \bigcup_{i=1}^t \mathcal{Q}'_i$ 是 \mathcal{Q} 的一个分划, 满足

$$\int_{\mathcal{Q}} f < \sum_{i=1}^t m_i |\mathcal{Q}'_i| + \varepsilon,$$

其中 $m_i = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{Q}'_i} f(\mathbf{x})$ 。那么由 (15.24) 及 f 的非负性可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}} f &\leq \sum_{i=1}^t m_i \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{Q}'_i)} |\det \varphi'| + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^t \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{Q}'_i)} (f \circ \varphi) |\det \varphi'| + \varepsilon \\ &= \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{Q})} (f \circ \varphi) |\det \varphi'| + \varepsilon. \end{aligned}$$

再由 ε 的任意性知 (15.29) 成立。

(3) 对非负函数 f 证明

$$\int_{\varphi(E)} f \leq \int_E (f \circ \varphi) |\det \varphi'|. \quad (15.30)$$

由 $\varphi(E)$ 是 Jordan 可测集知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在简单集合 $A \subseteq \varphi(E)$ 使得

$$\mu(\varphi(E)) \leq \mu(A) + \varepsilon.$$

因为 f 在 $\varphi(E)$ 上可积, 故 f 在 $\varphi(E)$ 上有界, 从而存在 $M' > 0$ 使得

$$|f(\mathbf{x})| \leq M', \quad \forall \mathbf{x} \in \varphi(E).$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(E)} f &= \int_A f + \int_{\varphi(E) \setminus A} f \leq \int_A f + M \cdot \mu(\varphi(E) \setminus A) \\ &\leq \int_A f + M' \varepsilon. \end{aligned} \quad (15.31)$$

现将 A 写成无公共内点的闭矩形的并:

$$A = \bigcup_{i=1}^h \mathcal{P}_i,$$

则由 (15.29) 知

$$\begin{aligned} \int_A f &= \sum_{i=1}^h \int_{\mathcal{P}_i} f \leq \sum_{i=1}^h \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{P}_i)} (f \circ \varphi) |\det \varphi'| \\ &= \int_{\varphi^{-1}(A)} (f \circ \varphi) |\det \varphi'| \leq \int_E (f \circ \varphi) |\det \varphi'|. \end{aligned}$$

代入 (15.31) 便得

$$\int_{\varphi(E)} f \leq \int_E (f \circ \varphi) |\det \varphi'| + M' \varepsilon,$$

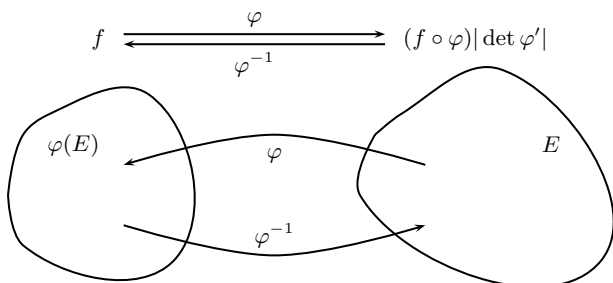
再由 ε 的任意性即知 (15.30) 成立。

(4) 对非负函数 f 证明定理 5.1。

对被积函数 $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ 及映射 φ^{-1} 应用 (15.30), 并注意到

$$\begin{aligned} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|) \circ \varphi^{-1} \cdot |\det(\varphi^{-1})'| &= ((f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})|\det(\varphi' \circ \varphi^{-1})'| \cdot |\det(\varphi^{-1})'| \\ &= f \cdot |\det(\varphi' \circ \varphi^{-1})'| \cdot |\det(\varphi^{-1})'| = f, \end{aligned}$$

便知与 (15.30) 反向的不等式成立。从而对非负函数证明了 (15.20)。



(5) 完成定理的证明。

记

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2}, \quad f^- = \frac{|f| - f}{2},$$

则 f^+ 与 f^- 均是 $\varphi(E)$ 上的非负可积函数, 从而由 (4) 知定理结论对 f^+ 和 f^- 成立, 进而也对 $f = f^+ - f^-$ 成立。

【推论 5.5】 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的一个 Jordan 可测集, f 在 E 上可积。又设 σ 是关于变量 x_1, \dots, x_n 的一个置换, 且 $\sigma(E) = E$, 则

$$\int_E f = \int_E f \circ \sigma.$$

证明. 这是因为 σ 在标准基下的矩阵的行列式等于 1 或 -1。 \square

【例 5.6】 设 $\Delta_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$, 试计算

$$I = \iiint_{\Delta_3} (x^2 - y^2 + 2) \, dx \, dy \, dz.$$

解. 由上述推论知

$$\iiint_{\Delta_3} x^2 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Delta_3} y^2 \, dx \, dy \, dz,$$

因此

$$I = 2 \iiint_{\Delta_3} dx dy dz = \frac{1}{3},$$

上面最后一步用到了例 4.6。 □

【例 5.7】 设 $0 < p < q$, $0 < a < b$ 。求抛物线 $y^2 = px$, $y^2 = qx$ 及双曲线 $xy = a$, $xy = b$ 所围成的闭区域的面积。

解. 用 D 表示这个闭区域, 那么

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : px \leq y^2 \leq qx, a \leq xy \leq b\}.$$

现作变量替换

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = xy,$$

则 $\varphi: (x, y) \mapsto (u, v)$ 是 $\mathbb{R}_{>0}^2$ 到其自身的连续可微双射, 且

$$\det \varphi' = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{3y^2}{x} = -3u,$$

故而 $|\det(\varphi^{-1})'| = \frac{1}{3u}$ 。此外, $\varphi(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : p \leq u \leq q, a \leq v \leq b\}$, 于是由定理 5.1 知

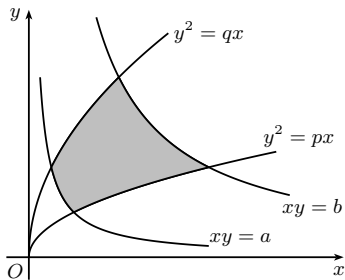
$$\begin{aligned} \mu(D) &= \int_D 1 = \int_{\varphi(D)} |\det(\varphi^{-1})'| = \iint_{\varphi(D)} \frac{du dv}{3u} \\ &= \int_a^b dv \int_p^q \frac{1}{3u} du = \frac{1}{3}(b-a) \log \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

□

【例 5.8】 在这个例子中, 我们利用变量替换重新计算一下 n 维单形

$$\Delta_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \geq 0 \ (1 \leq j \leq n), x_1 + \dots + x_n \leq a\}$$

的 Jordan 测度。



首先, 考虑映射 $\varphi: (t_1, \dots, t_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$, 其中 $x_j = at_j$ ($1 \leq j \leq n$), 则 φ 是从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^n 的连续可微双射, 它将 $\Delta_n(1)$ 映为 $\Delta_n(a)$, 并且 $\det \varphi' = a^n$, 所以

$$\mu(\Delta_n(a)) = \int_{\Delta_n(a)} 1 = a^n \int_{\Delta_n(1)} 1 = a^n \mu(\Delta_n(1)). \quad (15.32)$$

利用 Fubini 定理及上式可得

$$\begin{aligned} \mu(\Delta_n(1)) &= \int_{\Delta_n(1)} 1 = \int_0^1 dt_n \int_{\substack{t_j \geq 0 \ (1 \leq j \leq n-1) \\ t_1 + \dots + t_{n-1} \leq 1 - t_n}} dt_1 \cdots dt_{n-1} \\ &= \int_0^1 \mu(\Delta_{n-1}(1 - t_n)) dt_n = \mu(\Delta_{n-1}(1)) \int_0^1 (1 - t_n)^{n-1} dt_n \\ &= \frac{1}{n} \mu(\Delta_{n-1}(1)). \end{aligned}$$

因此递推可得

$$\mu(\Delta_n(1)) = \frac{1}{n!} \mu(\Delta_1(1)) = \frac{1}{n!}.$$

再将此代入 (15.32) 便得

$$\mu(\Delta_n(a)) = \frac{a^n}{n!}.$$

15.5.3 一些特殊的变量替换

(1) 极坐标变换

考虑平面上的极坐标变换

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

其中 r 和 θ 分别满足 $r \geq 0$ 和 $0 \leq \theta < 2\pi$, 那么 $\varphi: (r, \theta) \mapsto (x, y)$ 是从 $\{(r, \theta): r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 到 $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 的连续可微双射. 因为

$$|\det \varphi'| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

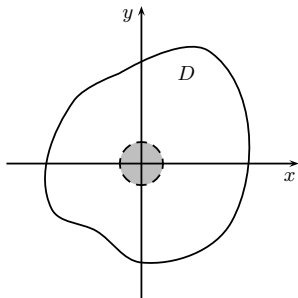
所以由定理 5.1 知, 对于 \mathbb{R}^2 中的 Jordan 可测集 D 以及在 D 上可积的函数 f 而言, 当 $\mathbf{0} \notin \bar{D}$ 时有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\varphi^{-1}(D)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

但是由于在通常情况下, 我们应用极坐标变换时所讨论的集合大多包含原点, 故而有必要去研究一下当 $\mathbf{0} \in \bar{D}$ 时上式是否依然成立。

为方便起见, 约定 $\varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 。对任意的 $\varepsilon > 0$, 记

$$D_\varepsilon = D \cap B(\mathbf{0}, \varepsilon)$$



以及 $S = D \setminus D_\varepsilon$, 那么 $\mathbf{0} \notin \bar{S}$ (参见右图), 于是有

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\varphi^{-1}(S)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta. \quad (15.33)$$

又由于 f 在 D 上可积, 从而 f 在 D 上有界, 也即存在 $\rho > 0$ 使得

$$|f(x, y)| \leq \rho, \quad \forall (x, y) \in D.$$

因此

$$\left| \iint_{D_\varepsilon} f(x, y) \, dx \, dy \right| < \rho \cdot \pi \varepsilon^2.$$

同时我们还有

$$\left| \iint_{\varphi^{-1}(D_\varepsilon)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \right| \leq \rho \iint_{r \in [0, \varepsilon], \theta \in [0, 2\pi]} r \, dr \, d\theta = \rho \cdot \pi \varepsilon^2$$

所以在 (15.33) 式两边分别添加上在 D_ε 和在 $\varphi^{-1}(D_\varepsilon)$ 上的积分可得

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\varphi^{-1}(D)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta + O(\rho \varepsilon^2).$$

再由 ε 的任意性知

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\varphi^{-1}(D)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta. \quad (15.34)$$

这说明无论 \bar{D} 是否包含原点, 极坐标的变量替换公式总是成立的。

【例 5.9】 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, 试计算

$$I = \iint_D x^2 y^2 dx dy.$$

解. 利用极坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 可将 D 变换成

$$D' = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\},$$

于是

$$I = \iint_{D'} (r \cos \theta)^2 (r \sin \theta)^2 r dr d\theta = \frac{1}{4} \int_1^2 r^5 dr \int_0^{2\pi} (\sin 2\theta)^2 d\theta = \frac{21}{8} \pi.$$

□

【例 5.10】 设 D 是由 y 轴以及两圆 $x^2 + y^2 = 4$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 在第一象限所围成的部分, 计算

$$I = \iint_D y dx dy.$$

解. 在极坐标变换下这两个圆在第一象限的部分分别为 $r = 2$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) 以及 $r = 2 \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$), 于是 D 相应地变为

$$D' = \left\{ (r, \theta) : 2 \cos \theta \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

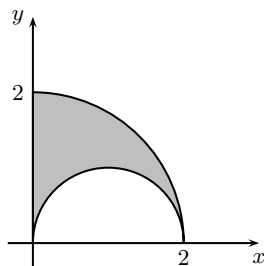
因此

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} (r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_{2 \cos \theta}^2 r^2 dr \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (8 - 8 \cos^3 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{8}{3} \left(-\cos \theta + \frac{1}{4} \cos^4 \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 2. \end{aligned}$$

□

有时我们或许会需要更一般的极坐标变换

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta, \end{cases}$$



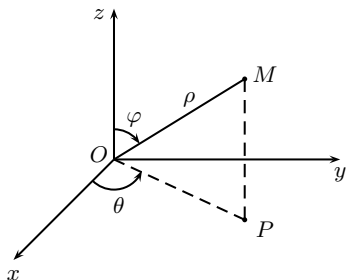
其中 a, b 是两个正常数。此时变量替换公式 (15.34) 相应地变为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = ab \iint_{\varphi^{-1}(D)} f(ar \cos \theta, br \sin \theta) r dr d\theta.$$

(2) 球坐标变换

\mathbb{R}^3 中的球坐标变换指的是

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \varphi, \end{cases}$$



其中 $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$ 。若用 $M(x, y, z)$ 表示空间 \mathbb{R}^3 中一点, 那么 ρ 即是 M 与原点之间的距离。当 M 不是原点时, φ 表示有向线段 OM 与 z 轴正向的夹角。进一步地, 当 M 不在 z 轴上时, 若将其在 Oxy 平面上的投影记作 $P(x, y, 0)$, 那么 θ 表示有向线段 OP 与 x 轴正向之间的夹角。我们称 (ρ, φ, θ) 为 M 的球坐标或空间极坐标 (polar coordinates in the space)。

映射 $\psi: (\rho, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ 是从

$$\{(\rho, \varphi, \theta) : \rho > 0, 0 < \varphi < \pi, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

到 $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ 的连续可微双射, 并且

$$\det \psi' = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \varphi,$$

因此由定理 5.1 知, 当 V 是 \mathbb{R}^3 中的 Jordan 可测集且在 \bar{V} 上有 $\rho^2 \sin \varphi \neq 0$ 时, 对于在 V 上可积的任一函数 f 有

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\psi^{-1}(V)} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

但是利用与极坐标变换类似的讨论知, 上式对任一 Jordan 可测集 V 均成立。

【例 5.11】 设 V 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的闭区域, 试计算

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

解. V 在球坐标变换下变为

$$V' = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta < 2\pi \right\},$$

因此

$$I = \iiint_{V'} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^a \rho^4 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2 - \sqrt{2}}{5} \pi a^5.$$

□

(3) 柱坐标变换

\mathbb{R}^3 中的柱坐标变换指的是

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z, \end{cases}$$

其中 $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ 。如果将点 $M(x, y, z)$ 在 Oxy 平面上的投影记作 $P(x, y, 0)$, 那么当 M 不在 z 轴上时, r 即是线段 OP 的长度, θ 表示有向线段 OP 与 x 轴正向之间的夹角。

映射 $\varphi : (r, \theta, z) \mapsto (x, y, z)$ 是从

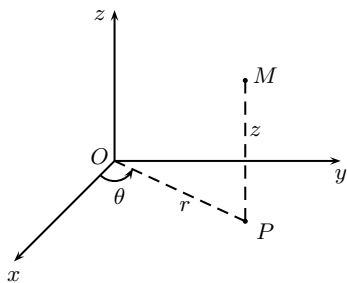
$$\{(r, \theta, z) : r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

到 $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ 的连续可微双射, 并且

$$\det \varphi' = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

利用与极坐标变换类似的讨论知, 对于 \mathbb{R}^3 中的 Jordan 可测集 V 以及在 V 上可积的函数 f 有

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\varphi^{-1}(V)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dr d\theta dz.$$



【例 5.12】 设 V 是由旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 与平面 $z = 2$ 所围成的闭区域, 试计算

$$I = \iiint_V x^2 \, dx \, dy \, dz.$$

解. 因为积分区域关于变量 x 和 y 对称, 故由推论 5.5 知

$$I = \frac{1}{2} \iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

V 在柱坐标变换下变为

$$V' = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi, \frac{r^2}{2} \leq z \leq 2 \right\},$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iiint_{V'} r^2 \cdot r \, dr \, d\theta \, dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 \, dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2} \right) dr = \frac{8}{3} \pi. \end{aligned}$$

□

(4) n 维球坐标变换

n 维球坐标变换指的是

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1, \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \dots \dots \dots \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \\ x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}, \end{cases}$$

其中 $r \geq 0$, $0 \leq \theta_j \leq \pi$ ($1 \leq j \leq n-2$), $0 \leq \theta_{n-1} < 2\pi$. 它是平面极坐标变换和三维空间球坐标变换在 \mathbb{R}^n 空间中的自然推广。

记 $\varphi : (r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$, 下面来计算 $\det \varphi'$. 为了书写方便,

我们来考虑 $(\varphi')^T$, 它等于

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cdots & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1} \\ -r \sin \theta_1 & r \cos \theta_1 \cos \theta_2 & r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cdots & r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1} \\ 0 & -r \sin \theta_1 \sin \theta_2 & r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 & \cdots & r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

把它的行列式记作 $f(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$, 对该行列式按第一列展开, 并对展开后的两个子式进行如下操作: 对于 $\cos \theta_1$ 所对应的子式, 从其第一行中提出 $r \cos \theta_1$, 并从其余各行中提出 $\sin \theta_1$, 则可得到 $f(r, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})$; 对于 $-r \sin \theta_1$ 所对应的子式, 从其每一列中提出 $\sin \theta_1$, 则可得到 $f(r, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})$ 。因此

$$\begin{aligned} \det(\varphi')^T &= f(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = (\cos \theta_1) \cdot (r \cos \theta_1) \cdot (\sin \theta_1)^{n-2} f(r, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}) \\ &\quad + (r \sin \theta_1) \cdot (\sin \theta_1)^{n-1} f(r, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}) \\ &= r(\sin \theta_1)^{n-2} f(r, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}). \end{aligned}$$

于是递推可得

$$\det \varphi' = r^{n-1} (\sin \theta_1)^{n-2} (\sin \theta_2)^{n-3} \cdots (\sin \theta_{n-2}).$$

因此, 利用和极坐标变换类似的讨论可得, 对于 \mathbb{R}^n 中任一 Jordan 可测集 E 以及在 E 上可积的函数 f 有

$$\begin{aligned} &\int_E \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\varphi^{-1}(E)} \cdots \int f(r \cos \theta_1, \cdots, r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-1}) r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} \sin^j \theta_{n-1-j} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}. \end{aligned}$$

【例 5.13】 设 $a > 0$, 且函数 f 在球

$$V = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2\}$$

上可积, 证明

$$\int_V \cdots \int f\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right) dx_1 \cdots dx_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^a f(r) r^{n-1} dr.$$

证明. 利用 n 维球坐标变换可得

$$\begin{aligned} & \int_V \cdots \int f(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \left(\int_0^a f(r)r^{n-1} dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \right) \prod_{j=1}^{n-2} \int_0^\pi \sin^j \theta_{n-1-j} d\theta_{n-1-j}. \end{aligned} \quad (15.35)$$

回忆起在第十四章例 2.25 中对任意的正实数 p, q 定义的 B 函数

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2(p-1)} (\cos \theta)^{2(q-1)} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^j \alpha d\alpha &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^j \alpha d\alpha = B\left(\frac{j+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{j+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{j}{2}+1)} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{j+1}{2})}{\Gamma(\frac{j+2}{2})}. \end{aligned}$$

将这代入 (15.35) 即得

$$\begin{aligned} \int_V \cdots \int f(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}) dx_1 \cdots dx_n &= 2\pi \left(\int_0^a f(r)r^{n-1} dr \right) \prod_{j=1}^{n-2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{j+1}{2})}{\Gamma(\frac{j+2}{2})} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^a f(r)r^{n-1} dr. \end{aligned}$$

□

【注 5.14】 特别地, 在上例中取 f 为恒等于 1 的函数, 则可得到 n 维球的 Jordan 测度为

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} a^n.$$

在上式中取 $n=2$ 即得平面上以 a 为半径的圆的面积为 πa^2 ; 取 $n=3$ 可得空间中以 a 为半径的球的体积为 $\frac{4}{3}\pi a^3$; 最后取 $n=4$ 可得四维空间中以 a 为半径的球的体积为 $\frac{\pi^2}{2}a^4$.

习题 15.5

1. 计算下列重积分:

$$(1) \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^2 \sin y \, dx \, dy;$$

$$(2) \iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy;$$

$$(3) \iint_{x^2+y^2 \leq 2x} \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy;$$

$$(4) \iint_D \frac{1}{x} \, dx \, dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由 } x+y=p, x+y=q \text{ } (0 < p < q), y=ax \text{ 及 } y=bx \text{ } (0 < a < b) \text{ 所围成的有界闭区域};$$

$$(5) \iint_D \frac{x^2 \sin xy}{y} \, dx \, dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由 } y^2=px, y^2=qx \text{ } (0 < p < q), x^2=ay \text{ 及 } x^2=by \text{ } (0 < a < b) \text{ 所围成的有界闭区域};$$

$$(6) \iiint_V z \, dx \, dy \, dz, \text{ 其中 } V \text{ 是椭球体 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \text{ } (a, b, c > 0) \text{ 的上半部分};$$

$$(7) \iiint_V \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy \, dz, \text{ 其中 } V \text{ 是由 } z=\sqrt{x^2+y^2} \text{ 与 } z=1 \text{ 所围成的有界闭区域};$$

$$(8) \iiint_V x^2 y \, dx \, dy \, dz, \text{ 其中 } V \text{ 是由 } z=x^2+y^2 \text{ 与 } z=2 \text{ 所围成的有界闭区域};$$

$$(9) \iiint_V x^2 \, dx \, dy \, dz, \text{ 其中 } V \text{ 是由 } z=\sqrt{x^2+y^2} \text{ 与 } x^2+y^2+z^2=8 \text{ 所围成的有界闭区域}.$$

2. 计算球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ($a > 0$) 与圆柱 $x^2 + y^2 \leq ax$ 相交的部分的体积。

3. 设 $0 \leq a < b$, 函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 非负且连续, 证明由平面闭区域

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$$

绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积为

$$2\pi \int_a^b x f(x) \, dx.$$

4. 求平面闭区域 $\{(x, y) : x \in [0, \pi], y \in [0, \sin x]\}$ 绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积。
5. 设 $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$, $h > 0$ 。 V 是由曲面 $z = ay^2$ ($y > 0$), $z = by^2$ ($y > 0$), $z = \alpha x$, $z = \beta x$ 以及 $z = h$ 所围成的闭区域。计算

$$I = \iiint_V x^2 dx dy dz.$$

6. 设 $a > 0$, V 是由 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy$ ($a > 0$) 所围成的有界闭区域满足 $z \geq 0$ 的那一部分, 计算

$$I = \iiint_V \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

7. 设 A 是三阶正定对称矩阵, 计算

$$I = \iiint_{\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 1} e^{\sqrt{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}} d\mathbf{x}.$$

8. 设 a, b, c 不全为 0, f 在 \mathbb{R} 上连续, 证明

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f(ax+by+cz) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 (1-u^2) f(ku) du,$$

其中 $k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 。

9. 计算 n 重积分

$$I = \int_{[0,1]^n} \cdots \int (x_1 + \cdots + x_n)^2 dx_1 \cdots dx_n.$$

10. 设 f 是定义在区间 $[0, a]$ 上的连续函数, 证明

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) dx_n = \frac{1}{n!} \left(\int_0^a f(x) dx \right)^n.$$

§ 15.6

广义重积分

本节的目的是要把在前几节中建立的重积分理论从两个方向进行推广: 一是讨论无界集上的积分; 二是讨论有界集上的无界函数的积分。我们希望在统一的框架下同时对它们进行讨论。

【定义 6.1】 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 如果 Jordan 可测集列 $\{E_m\}$ 满足

$$E_m \subseteq E_{m+1} \quad (\forall m \geq 1) \quad \text{以及} \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = E,$$

则称 $\{E_m\}$ 是 E 的一个穷竭。

【定义 6.2】 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. 如果对于 E 的使得 f 在每个 E_m 上均可积的任一穷竭 $\{E_m\}$, 极限

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_m} f$$

都存在且相等, 那么我们就称 f 在 E 上可积, 并将上述极限值记作

$$\int_E f,$$

此时也称积分 $\int_E f$ 收敛. 否则就称 $\int_E f$ 发散, 或称 f 在 E 上不可积.

在上述定义中我们只考虑 E 的那些穷竭 $\{E_m\}$, 其使得 f 在每个 E_m 上可积. 去验证 $\{E_m\}$ 满足这一条件事实上远非它看起来的那么困难, 下面的引理说明了这一点.

【引理 6.3】 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, f 是定义在 E 上的一个函数. 若存在 E 的一个穷竭 $\{E_m\}$, 使得 f 在每个 E_m 上均可积, 那么对于 E 的任一穷竭 $\{F_k\}$, 只要 f 在每个 F_k 上有界, 它就在每个 F_k 上可积.

证明. 对于任意的 k , $\{E_m \cap F_k : m \geq 1\}$ 是 F_k 的一个穷竭. 现任取 $x \in F_k$, 则必存在 m 使得 $x \in E_m \cap F_k$. 注意到若 x 是 $E_m \cap F_k$ 的内点且是 f 的连续点, 则其必是 f 在 F_k 上的连续点. 故而 f 在 F_k 上的不连续点要么是 f 在某个 $E_m \cap F_k$ 上的不连续点, 要么属于某个 $\partial(E_m \cap F_k)$. 由 f 在每个 E_m 上的可积性及 Lebesgue 定理知, f 在 $E_m \cap F_k$ 上的全体不连续点构成 Lebesgue 零测集; 此外, $E_m \cap F_k$ 的 Jordan 可测性蕴含了 $\partial(E_m \cap F_k)$ 是 Lebesgue 零测集. 因此由命题 2.8 (2) 知 f 在 F_k 上的全体不连续点构成 Lebesgue 零测集, 这意味着 f 在 F_k 上可积. \square

这一引理提醒我们, 选择穷竭时只需保证穷竭中的每个集合与 f 的诸奇点都保持一定的距离即可.

尽管定义 6.2 是针对一般的集合 E 而言的, 但是下述命题指出, 如果 E 是 Jordan 可测集, 那么这一定义实际上与 Riemann 积分 $\int_E f$ 的定义是相容的, 这说明它确实可被看作是 Jordan 可测集上的 Riemann 积分定义的推广.

【命题 6.4】 设 E 是 Jordan 可测集且 f 在 E 上可积。又设 Jordan 可测集列 $\{E_m\}$ 满足 $E_m \subseteq E_{m+1} (\forall m \geq 1)$ 以及

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_m.$$

那么 $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(E_m) = \mu(E)$ 并且

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_m} f = \int_E f.$$

证明. 一方面, 由 $E_m \subseteq E_{m+1} \subseteq E$ 知 $\mu(E_m) \leq \mu(E_{m+1}) \leq \mu(E)$, 故而数列 $\{\mu(E_m)\}$ 单调递增且以 $\mu(E)$ 为上界, 因此 $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(E_m) \leq \mu(E)$. 另一方面, 任给 $\varepsilon > 0$, 由 $\mu(\partial E) = 0$ 知存在开的简单集合 S 使得 $\partial E \subseteq S$ 且 $\mu(S) < \varepsilon$. 因此 $E \cup S = E^\circ \cup S$ 是开集. 对每个 E_m 重复以上操作知, 存在开的简单集合 S_m 使得 $E_m \cup S_m$ 是开集且 $\mu(S_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$. 注意到

$$\bar{E} \subseteq E \cup S = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_m \right) \cup S \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_m \cup S_m) \right) \cup S,$$

故由 \bar{E} 是紧集知存在 $m_1 < m_2 < \dots < m_k$ 使得

$$\bar{E} \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^k (E_{m_j} \cup S_{m_j}) \right) \cup S = \left(\bigcup_{j=1}^k S_{m_j} \right) \cup E_{m_k} \cup S.$$

于是

$$\mu(E) = \mu(\bar{E}) \leq \sum_{j=1}^k \mu(S_{m_j}) + \mu(E_{m_k}) + \mu(S) < \mu(E_{m_k}) + 2\varepsilon,$$

从而由 ε 的任意性知 $\mu(E) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(E_m)$. 综上两方面可得 $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(E_m) = \mu(E)$.

此外, 由 f 在 E 上的可积性可推出其在 E 上的有界性, 即存在 $M > 0$ 使得对任意的 $\mathbf{x} \in E$ 有 $|f(\mathbf{x})| \leq M$, 而由 Lebesgue 定理容易得出 f 在每个 E_m 上均可积. 于是

$$\left| \int_E f - \int_{E_m} f \right| = \left| \int_{E \setminus E_m} f \right| \leq M(\mu(E) - \mu(E_m)).$$

因此由上一段所得结果知 $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_m} f = \int_E f$. □

为了给出一些判定积分敛散性的方法, 我们先从研究非负函数的积分开始。

【命题 6.5】 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个非负函数, 那么 $\int_E f$ 收敛的充要条件是: 存在 E 的穷竭 $\{E_m\}$ 使得 f 在每个 E_m 上均可积, 并且极限

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_m} f \quad (15.36)$$

存在。

证明. 必要性是显然的, 下证充分性。设 $\{F_k\}$ 是 E 的任一穷竭, 它使得 f 在每个 F_k 上均可积。对任意的 k , $\{E_m \cap F_k : m \geq 1\}$ 是 $\{F_k\}$ 的一个穷竭。因为 f 非负, 故而

$$\int_{E_m \cap F_k} f \leq \int_{E_m} f, \quad \forall m \geq 1.$$

因此由命题 6.4 知

$$\int_{F_k} f = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_m \cap F_k} f \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_m} f.$$

于是极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{F_k} f$ 存在且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{F_k} f \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_m} f,$$

再由对称性可得反向不等式成立, 于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{F_k} f = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_m} f.$$

从而 $\int_E f$ 收敛。 □

按照命题 6.5, 对于定义在 E 上的非负函数而言, 只需选取 E 的一个特殊的穷竭 $\{E_m\}$, 通过研究极限 (15.36) 的存在性就可得到 $\int_E f$ 的收敛性。为了方便起见, 当 E 是无界集且 f 在 E 的任一有界子集上均有界时, 我们通常选择 E_m 等于

$$B(\mathbf{0}, m) \cap E \quad \text{或} \quad [-m, m]^n \cap E$$

(前提是这两个集合是 Jordan 可测的)。如果 E 是 Jordan 可测集, 并且 f 的全部奇点构成 ∂E 的子集 D , 那么我们通常选择

$$E_m = E \setminus A_m,$$

其中 $\{A_m\}$ 是一个简单集合列, 满足 $A_m \supseteq A_{m+1} \supseteq D$ ($\forall m \geq 1$). 特别地, 当 $D = \{x_0\}$ 时 (也即是说, x_0 是 f 的唯一的奇点), 那么我们可以取 A_m 为以 x_0 为中心, 以 $\frac{1}{m}$ 为边长的正方形, 当然有时更为方便的是取

$$E_m = E \setminus B\left(x_0, \frac{1}{m}\right).$$

下面来看一些例子。

【例 6.6】 我们来考察积分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

如果利用 $\{B(\mathbf{0}, m)\}$ 作为 \mathbb{R}^2 的穷竭, 那么由极坐标变换知

$$\iint_{B(\mathbf{0}, m)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^m e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-m^2}).$$

因此

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{B(\mathbf{0}, m)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi.$$

于是由命题 6.5 知 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ 收敛且其值为 π 。

另一方面, 如果采用 $\{[-m, m]^2\}$ 作为 \mathbb{R}^2 的穷竭, 那么由 Fubini 定理知

$$\iint_{[-m, m]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-m}^m e^{-x^2} dx \right)^2,$$

从而

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{[-m, m]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

注意到刚才已经计算出了上式左侧等于 π , 所以作为一个副产品我们得到了

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

【例 6.7】 设 D 是平面上的由 $x = 0$, $x = 1$ 以及 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 在第一象限所围成的区域 (如右图所示), 证明

$$\iint_D \frac{1}{y^2} dx dy$$

收敛。

证明. 我们有

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, y > \sqrt{2x - x^2}\}.$$

现考虑 D 的穷竭 $\{D_n\}$, 其中

$$D_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x < 1, \sqrt{2x - x^2} < y \leq n \right\},$$

那么

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{1}{y^2} dx dy &= \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^n \frac{dy}{y^2} = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} - \frac{1}{n} \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \arcsin \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}). \end{aligned}$$

因此我们所考虑的广义积分收敛, 且其值为 $\frac{\pi}{2}$. □

下面我们来介绍一些判定非负函数积分敛散性的方法。

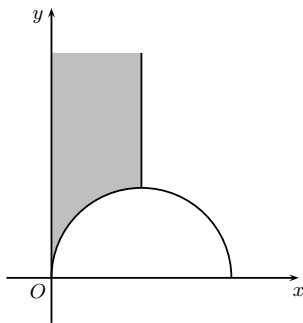
【命题 6.8】 (比较判别法) 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, f 与 g 均是定义在 E 上的非负函数并且

$$f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E.$$

又设存在 E 的穷竭 $\{E_m\}$ 使得 f 与 g 均在每个 E_m 上可积。如果 $\int_E g$ 收敛, 那么 $\int_E f$ 也收敛。

证明. 由假设知, 对任意的 $k \geq 1$ 有

$$\int_{E_k} f \leq \int_{E_k} g \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_m} g,$$



也即是说 $\left\{ \int_{E_k} f : k \geq 1 \right\}$ 有上界, 因为 $\int_{E_k} f$ 单调递增, 故它必收敛, 于是由命题 6.5 知 $\int_E f$ 收敛。 \square

既然有了比较判别法, 我们就可以选择一些特殊函数作为标准来与别的函数比较。

【命题 6.9】 设 E 是 \mathbb{R}^n 的一个无界子集, f 是定义在 E 上的非负函数。又设对任意的 $m \geq 1$, f 在 $B(\mathbf{0}, m) \cap E$ 上可积, 且存在常数 $p > n$, 使得 $\frac{1}{|\mathbf{x}|^p}$ 在 $(E \cap B(\mathbf{0}, m)) \setminus B(\mathbf{0}, 1)$ ($m \geq 1$) 上可积, 并且当 $|\mathbf{x}|$ 充分大时有

$$f(\mathbf{x}) \ll \frac{1}{|\mathbf{x}|^p},$$

那么 $\int_E f$ 收敛。

证明. 按照比较判别法, 只需证明

$$\int_{E \setminus B(\mathbf{0}, 1)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^p} dx_1 \cdots dx_n \quad (15.37)$$

收敛即可。记 $E_m = (E \cap B(\mathbf{0}, m)) \setminus B(\mathbf{0}, 1)$, 则 $\{E_m\}$ 是 $E \setminus B(\mathbf{0}, 1)$ 的一个穷竭。因为对任意的 $m \geq 1$, 由 n 维球坐标变换知

$$\begin{aligned} \int_{E_m} \frac{1}{|\mathbf{x}|^p} dx_1 \cdots dx_n &\leq \int_{B(\mathbf{0}, m) \setminus B(\mathbf{0}, 1)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^p} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \left(\int_1^m \frac{1}{r^{p-n+1}} dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \right) \prod_{j=1}^{n-2} \int_0^\pi \sin^j \theta_{n-1-j} d\theta_{n-1-j} \ll 1, \end{aligned}$$

因此 $\left\{ \int_{E_m} \frac{1}{|\mathbf{x}|^p} dx_1 \cdots dx_n : m \geq 1 \right\}$ 有界, 从而 (15.37) 中的积分收敛。 \square

类似地, 对于有奇点的情况我们有下述结论。

【命题 6.10】 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的有界集, f 是定义在 E 上的非负函数, 并且 $\mathbf{x}_0 \in \partial E$ 是 f 的唯一的奇点。如果存在常数 $p < n$ 使得当 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ ($\mathbf{x} \in E$) 时有

$$f(\mathbf{x}) \ll \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^p},$$

那么 $\int_E f$ 收敛。

下面来讨论一般函数的积分。在一元积分学中我们知道，如果广义积分绝对收敛，则其必收敛，但反之不然。然而由定义 6.2 所给出的广义积分的收敛性却等价于绝对收敛性，我们先来证明比较困难的一个部分。在证明过程中，我们需要下述非负函数的广义积分的可加性。

【引理 6.11】 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ， f 与 g 均是定义在 E 上的非负函数。如果 $\int_E f$ 与 $\int_E g$ 均收敛，那么 $\int_E (f+g)$ 也收敛且

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g. \quad (15.38)$$

证明. 选择 E 的穷竭 $\{E_m\}$ 和 $\{F_m\}$ ，使得 f 在每个 E_m 上可积， g 在每个 F_m 上可积。容易验证 $\{E_m \cap F_m\}$ 也是 E 的穷竭，并且由命题 3.3 (2) 知

$$\int_{E_m \cap F_m} (f+g) = \int_{E_m \cap F_m} f + \int_{E_m \cap F_m} g.$$

因为 $\int_E f$ 与 $\int_E g$ 均收敛，所以当 $m \rightarrow \infty$ 时上式右边趋于

$$\int_E f + \int_E g,$$

于是由命题 6.5 知 $\int_E (f+g)$ 也收敛且有 (15.38) 成立。□

【命题 6.12】 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ， $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果 $\int_E f$ 收敛，那么 $\int_E |f|$ 也收敛。

证明. 利用反证法。记

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2}, \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}, \quad (15.39)$$

如果 $\int_E |f|$ 发散，那么由 $|f| = f^+ + f^-$ 及引理 6.11 知 $\int_E f^+$ 与 $\int_E f^-$ 中至少有一个发散，不妨设前者发散。

对于 E 的任一使得 f 在每个 E_m 上均可积的穷竭 $\{E_m\}$ ，由命题 3.3 (1) 知 f^+ 也在每个 E_m 上可积。因为 f^+ 非负且 $\int_E f^+$ 发散，所以数列

$$\left\{ \int_{E_m} f^+ \right\}_{m \geq 1}$$

单调递增无上界，这意味着我们不妨假设

$$\int_{E_{m+1}} f^+ \geq \int_{E_m} |f| + \int_{E_m} f^+ + m, \quad \forall m \geq 1,$$

也即

$$\int_{E_{m+1} \setminus E_m} f^+ \geq \int_{E_m} |f| + m, \quad \forall m \geq 1. \quad (15.40)$$

现在考虑上式左侧积分所对应的 Darboux 下和, 我们知道存在简单集合

$$S = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{Q}_j \subseteq E_{m+1} \setminus E_m$$

使得

$$\sum_{j=1}^k m_j |\mathcal{Q}_j| \geq \int_{E_{m+1} \setminus E_m} f^+ - 1,$$

其中 \mathcal{Q}_j ($1 \leq j \leq k$) 是两两无公共内点的闭矩形, $m_j = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{Q}_j} f^+(\mathbf{x})$ 。注意到 $f^+ = \max(f, 0)$, 故而若用 \sum^* 表示对满足 $m_j > 0$ 的指标 j 进行求和, 则有

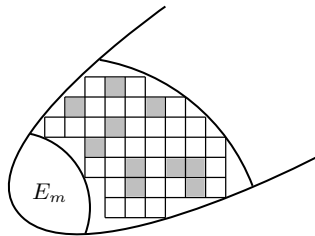
$$\sum_{1 \leq j \leq k}^* m_j |\mathcal{Q}_j| \geq \int_{E_{m+1} \setminus E_m} f^+ - 1.$$

因为对于上式左侧求和中的 j 有

$$m_j = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{Q}_j} f^+(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{Q}_j} f(\mathbf{x}),$$

故若记

$$P_m = \bigcup_{1 \leq j \leq k}^* \mathcal{Q}_j$$



(如右图中阴影部分), 则有 $P_m \subseteq E_{m+1} \setminus E_m$ 以及

$$\int_{P_m} f \geq \sum_{1 \leq j \leq k}^* m_j |\mathcal{Q}_j| \geq \int_{E_{m+1} \setminus E_m} f^+ - 1 \geq \int_{E_m} |f| + m - 1, \quad (15.41)$$

上面最后一步用到了 (15.40)。现记 $F_m = E_m \cup P_m$, 于是由 $P_m \subseteq E_{m+1} \setminus E_m$ 知 $F_m \subseteq F_{m+1}$, 除此之外,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} (E_m \cup P_m) = E,$$

因此 $\{F_m\}$ 是 E 的一个穷竭。但是由 $f \geq -|f|$ 及 (15.41) 知

$$\int_{F_m} f = \int_{P_m} f + \int_{E_m} f \geq \int_{P_m} f - \int_{E_m} |f| \geq m - 1,$$

进而得到

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{F_m} f = +\infty,$$

这与 $\int_E f$ 的收敛性矛盾。 □

有了以上结论，我们可以来阐述广义重积分的一些基本性质了。

【命题 6.13】 设 $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ ，函数 f 在 $E \cup F$ 上有定义， g 在 E 上有定义。

(1) 若 $\int_E f$ 收敛，那么对任意的 $a \in \mathbb{R}$ ， $\int_E af$ 收敛，且有

$$\int_E af = a \int_E f.$$

(2) 若 $\int_E f$ 与 $\int_E g$ 均收敛，那么 $\int_E (f+g)$ 也收敛且

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$

(3) 若 E 与 F 无公共内点，且 $\int_E f$ 与 $\int_F f$ 均收敛，那么 $\int_{E \cup F} f$ 收敛，并且有

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f.$$

证明. (1) 可由定义直接得到。

(2) 类似于引理 6.11 的证明，我们事实上可以选择 E 的穷竭 $\{E_m\}$ ，使得 f 与 g 均在每个 E_m 上可积。现考虑 E 的任一穷竭 $\{F_m\}$ ，其使得 $f+g$ 在每个 F_m 上可积。值得一提的是，这并不意味着 f 或 g 在 F_m 上可积，而这正是棘手之处。为了达成证明，需要做一些迂回。因为在 $E_m \cap F_m$ 上 f 与 g 均可积，故由命题 3.3 (2) 知

$$\int_{F_m \cap E_m} (f+g) = \int_{F_m \cap E_m} f + \int_{F_m \cap E_m} g. \quad (15.42)$$

但是因为我们的目标是去证明 $\int_{F_m} (f+g)$ 在 $m \rightarrow \infty$ 时收敛，所以必须把这一积分与上式左边的积分联系起来。注意到 $\{F_m \cap E_k : k \geq 1\}$ 是 F_m 的一个穷竭，因此按照命题 6.4，我们有

$$\int_{F_m} (f+g) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{F_m \cap E_k} (f+g).$$

进而得到

$$\left| \int_{F_m} (f+g) - \int_{F_m \cap E_m} (f+g) \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{F_m \cap E_k} (f+g) - \int_{F_m \cap E_m} (f+g) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_{F_m \cap (E_k \setminus E_m)} (f + g) \right| \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k \setminus E_m} (|f| + |g|) \\
&= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} |f| - \int_{E_m} |f| \right) + \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} |g| - \int_{E_m} |g| \right) \\
&= \left(\int_E |f| - \int_{E_m} |f| \right) + \left(\int_E |g| - \int_{E_m} |g| \right),
\end{aligned}$$

上式右边广义积分的存在性可由命题 6.12 保证。现将 (15.42) 代入上式左边，即得

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{F_m} (f + g) - \int_{F_m \cap E_m} f - \int_{F_m \cap E_m} g \right| \\
&\leq \left(\int_E |f| - \int_{E_m} |f| \right) + \left(\int_E |g| - \int_{E_m} |g| \right).
\end{aligned} \tag{15.43}$$

因为 $\{F_m \cap E_m\}$ 也是 E 的一个穷竭，故而

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{F_m \cap E_m} f = \int_E f, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{F_m \cap E_m} g = \int_E g.$$

此外，当 $m \rightarrow \infty$ 时 (15.43) 右边趋于 0，所以由 (15.43) 知

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{F_m} (f + g) = \int_E f + \int_E g,$$

从而命题得证。

(3) 首先讨论 f 是非负函数的情形。分别选取 E 和 F 的穷竭 $\{E_m\}$ 及 $\{F_m\}$ ，使得 f 在每个 E_m 及 F_m 上均可积。那么 $\{E_m \cup F_m\}$ 是 $E \cup F$ 的一个穷竭，且由 E 与 F 无公共内点知

$$\int_{E_m \cup F_m} f = \int_{E_m} f + \int_{F_m} f,$$

于是

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_m \cup F_m} f = \int_E f + \int_F f.$$

结合命题 6.5 便对非负函数 f 证明了结论。

对于一般的 f ，我们考虑由 (15.39) 所定义的两个非负函数 f^+ 与 f^- ，注意到由命题 6.12 知积分 $\int_E |f|$ 与 $\int_F |f|$ 均收敛，再由 (2) 知

$$\int_E f^+, \quad \int_E f^-, \quad \int_F f^+, \quad \int_F f^-$$

均收敛, 从而由上一段对非负函数所证明的结论知

$$\int_{E \cup F} f^+ \quad \text{与} \quad \int_{E \cup F} f^-$$

也均收敛, 且

$$\int_{E \cup F} f^+ = \int_E f^+ + \int_F f^+, \quad \int_{E \cup F} f^- = \int_E f^- + \int_F f^-,$$

于是再次利用 (2) 便可完成证明. \square

【定理 6.14】 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, 那么 $\int_E f$ 收敛当且仅当 $\int_E |f|$ 收敛.

证明. 必要性的部分也即是命题 6.12, 下证充分性. 沿用 (15.39) 中的记号. 因为 $0 \leq f^+$, $f^- \leq |f|$, 故由比较判别法可得 $\int_E f^+$ 与 $\int_E f^-$ 均收敛. 注意到 $f = f^+ - f^-$, 因此由命题 6.13 (2) 知 $\int_E f$ 收敛. \square

在完成上述定理的证明后, 有必要来举例说明一下由定义 6.2 所给出的收敛性定义与第十一章中一元广义积分敛散性定义的本质差异所在了. 设 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ 是一个收敛级数, 我们考虑定义在 $\mathbb{R}_{\geq 1}$ 上的函数

$$f(x) = a_m, \quad \text{若 } x \in [m, m+1)$$

那么由 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ 的收敛性知广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 在第十一章的定义下收敛. 现设 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k}$ 是 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ 的一个重排, 若记

$$E_j = \bigcup_{k=1}^j [m_k, m_k + 1),$$

那么 $\{E_j\}$ 构成 $\mathbb{R}_{\geq 1}$ 的一个穷竭, 注意到 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k}$ 的部分和恰是

$$\int_{E_j} f,$$

所以重排级数收敛当且仅当极限

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_j} f$$

存在. 由此便知, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 在定义 6.2 的意义下收敛的一个必要条件是级数 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ 的任一重排级数均收敛于同一值, 而这当且仅当 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ 绝对收敛, 也即

$\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛。因此当 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ 条件收敛时, 广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 虽然在第十一章的定义下是收敛的, 但却在定义 6.2 的意义下发散。

通过以上讨论我们发现定义 6.2 对收敛性的要求要比第十一章中一元广义积分收敛性的要求高得多, 所以在这一意义下我们能够保证收敛与绝对收敛的等价性。

最后我们来看广义重积分的变量替换。

【定理 6.15】 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的开集, $\varphi: E \rightarrow \varphi(E)$ 是一个连续可微的双射, 并且对任意的 $\mathbf{x} \in E$ 而言 $\varphi'(\mathbf{x})$ 均非奇异。又设定义在 $\varphi(E)$ 的函数 f 在 $\varphi(E)$ 的任一 Jordan 可测紧子集上可积。那么当

$$\int_{\varphi(E)} f \quad \text{与} \quad \int_E (f \circ \varphi) |\det \varphi'|$$

中有一个收敛时, 另一个必收敛, 且有

$$\int_{\varphi(E)} f = \int_E (f \circ \varphi) |\det \varphi'|. \quad (15.44)$$

证明. 不妨设 $\int_{\varphi(E)} f$ 收敛。由于 $f = f^+ - f^-$ 且 $|f| = f^+ + f^-$, 因此由定理 6.14 我们只需对非负函数证明定理结论即可。

对正整数 m , 我们用边长为 $\frac{1}{2^m}$ 的两两无公共内点的闭正方形来分划 \mathbb{R}^n , 将这些小正方形中位于 $B(\mathbf{0}, m) \cap E$ 内的取出, 并用 E_m 表示它们的并集, 那么 $\{E_m\}$ 是 E 的一个穷竭 (留作练习)。当然, 每个 E_m 均是 \mathbb{R}^n 中的 Jordan 可测紧集, 从而 $\varphi(E_m)$ 亦然。于是由假设条件知 f 在每个 $\varphi(E_m)$ 上可积, 进而由变量替换定理可得

$$\int_{\varphi(E_m)} f = \int_{E_m} (f \circ \varphi) |\det \varphi'|.$$

现令 $m \rightarrow \infty$, 因为此时上式左边的极限存在, 故而上式右边的极限也存在, 于是由命题 6.5 知 $\int_E (f \circ \varphi) |\det \varphi'|$ 收敛, 并且 (15.44) 成立。□

习题 15.6

1. 设 Jordan 零测集列 $\{E_m\}$ 满足 $E_m \subseteq E_{m+1}$ ($\forall m \geq 1$), 证明 $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ 必是 Lebesgue 零测集。
2. 证明集合 $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ 不存在穷竭。

3. 设 E 是 \mathbb{R}^n 中的开集, 证明定理 6.15 中构造的集合列 $\{E_m\}$ 是 E 的穷竭。

4. 讨论下列广义重积分的敛散性:

$$(1) \iint_{\mathbb{R} \times [0,1]} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p}; \quad (2) \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2+xy+y^2)^p};$$

$$(3) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^p}; \quad (4) \iint_{[0,a]^2} \frac{dx dy}{|x-y|^p}.$$

5. 证明 $\iint_{[0,+\infty]^2} e^{-xy} \sin x dx dy$ 发散。

6. 设 $p > 0, q > 0$, 试讨论积分 $\iint_{|x|+|y| \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$ 的敛散性。

7. (Dirichlet 积分) 设 a, p_1, \dots, p_n 均是正实数, 证明

$$\int_{\Delta_n(a)} x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n = \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n + 1)} a^{p_1 + \dots + p_n},$$

其中 $\Delta_n(a)$ 是例 4.6 中所定义的 n 维单形。

曲线积分

许多数学概念都根植于力学之中。

——伊藤清

§ 16.1

曲线的弧长

本节的主要目的是介绍如何计算曲线的弧长，此外还将简单介绍平面曲线的曲率。

我们首先来作一个启发式的讨论。考虑如下图所示以 A, B 为端点的曲线段，为了计算该曲线段的“长度”，按照极限的观点，我们可在该曲线段上从 A 到 B 依次取若干个

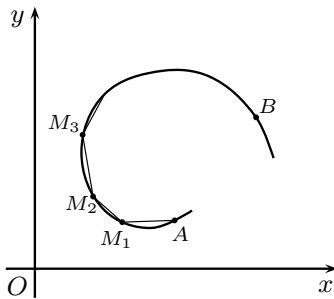
$$A = M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = B,$$

并将相邻两点连接起来形成一条折线。当分点个数逐渐增加，且弦长的最大值 $\max_{1 \leq i \leq n} \overline{M_{i-1}M_i}$ 趋于 0 时，如果折线长度相应地趋于某一极限，

则可将这一极限看作是原曲线段的“长度”。上述思想可追溯到 Archimedes 关于圆周率的计算。

为了将上述讨论严格化，我们来考虑空间中由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (16.1)$$



所定义的曲线段 C , 如果对任意的 $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, 当 $t_1 = a$ 与 $t_2 = b$ 不同时成立时总有

$$(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2), z(t_2)),$$

则称 C 为一条简单曲线。若进一步有 $(x(a), y(a), z(a)) = (x(b), y(b), z(b))$, 则称 C 为一条简单闭曲线。在本书中, 如果没有特意说明, 我们所研究的曲线均是简单曲线。

【定义 1.1】 若存在 $s \in \mathbb{R}$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$ 而言, 存在 $\delta > 0$, 其对由区间 $[a, b]$ 的任意一组满足 $\max_i \Delta t_i < \delta$ 的分点

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

所定义的曲线上的点 $M_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ 均有

$$\left| \sum_{1 \leq i \leq n} \overline{M_{i-1}M_i} - s \right| < \varepsilon,$$

那么就称曲线段 C 是可求长的, 并称 s 为 C 的弧长。

类似也可给出由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (16.2)$$

所确定的平面曲线段可求长及弧长的定义。

【命题 1.2】 如果 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 均在区间 $[a, b]$ 上连续可导, 则由 (16.1) 所定义的曲线段 C 是可求长的, 且其弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (16.3)$$

证明. 设

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

是 $[a, b]$ 的一组分点, 记 $M_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ 。由 Lagrange 中值定理知, 对任意的 i , 存在 $[t_{i-1}, t_i]$ 中的点 ζ_i , ξ_i 及 η_i 使得

$$\begin{aligned} \overline{M_{i-1}M_i} &= \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2} \\ &= \sqrt{[x'(\zeta_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2 + [z'(\eta_i)]^2} \Delta t_i, \end{aligned}$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ 。于是由 Minkowski 不等式 (第二章推论 4.4) 知

$$\begin{aligned} & \left| \overline{M_{i-1}M_i} - \sqrt{[x'(t_i)]^2 + [y'(t_i)]^2 + [z'(t_i)]^2} \Delta t_i \right| \\ & \leq \sqrt{[x'(\zeta_i) - x'(t_i)]^2 + [y'(\xi_i) - y'(t_i)]^2 + [z'(\eta_i) - z'(t_i)]^2} \Delta t_i. \end{aligned} \quad (16.4)$$

此外, 由 $x'(t)$, $y'(t)$ 及 $z'(t)$ 在 $[a, b]$ 上的连续性知它们在该区间上一致连续, 从而对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得对 $[a, b]$ 中满足 $|t' - t''| < \delta_1$ 的任意两点 t', t'' 有

$$\begin{cases} |x'(t') - x'(t'')| < \varepsilon, \\ |y'(t') - y'(t'')| < \varepsilon, \\ |z'(t') - z'(t'')| < \varepsilon. \end{cases}$$

因而由 (16.4) 知当 $\max_i \Delta t_i < \delta_1$ 时就有

$$\left| \overline{M_{i-1}M_i} - \sqrt{[x'(t_i)]^2 + [y'(t_i)]^2 + [z'(t_i)]^2} \Delta t_i \right| < 2\varepsilon \Delta t_i.$$

对 i 求和便得

$$\left| \sum_{i=1}^n \overline{M_{i-1}M_i} - \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(t_i)]^2 + [y'(t_i)]^2 + [z'(t_i)]^2} \Delta t_i \right| < 2\varepsilon(b-a).$$

注意到由 $x'(t)$, $y'(t)$ 及 $z'(t)$ 的连续性知 $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$ 在 $[a, b]$ 上可积, 因此对同一个 ε 而言, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $\max_i \Delta t_i < \delta_2$ 时有

$$\left| \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(t_i)]^2 + [y'(t_i)]^2 + [z'(t_i)]^2} \Delta t_i - I \right| < \varepsilon,$$

其中 I 表示 (16.3) 右边的积分。综上, 当 $\max_i \Delta t_i < \min(\delta_1, \delta_2)$ 时有

$$\left| \sum_{i=1}^n \overline{M_{i-1}M_i} - I \right| < [2(b-a) + 1]\varepsilon,$$

根据定义 1.1 便知曲线段 C 是可求长的, 且其弧长等于 I 。 □

特别地, 若取 $z(t) = 0$ ($\forall t$), 则可得到平面曲线的相应结论。

【命题 1.3】 设 $x(t)$, $y(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续可导, 那么平面上由 (16.2) 所定义的曲线段 C 是可求长的, 且其弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (16.5)$$

若平面上的曲线段是由方程 $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) 给出的, 其中 f 在 $[a, b]$ 上连续可导, 那么我们就可以将 x 视为参数, 从而由命题 1.3 得到该曲线的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

此外, 如果平面上的曲线段由极坐标方程 $r = r(\theta)$ ($\theta \in [\alpha, \beta]$) 定义, 其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可导, 那么我们就可将其看作由参数方程

$$\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta, \\ y = r(\theta) \sin \theta, \end{cases} \quad \theta \in [\alpha, \beta] \quad (16.6)$$

给出. 注意到此时有

$$\begin{aligned} [x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 &= (r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta)^2 + (r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta)^2 \\ &= [r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2, \end{aligned}$$

所以该曲线段的弧长为

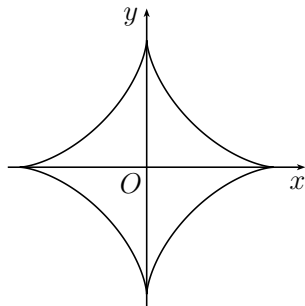
$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2} d\theta. \quad (16.7)$$

【例 1.4】 设 $a > 0$. 对于如下图所示的星形线 (astroid)

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

而言, 其在第一象限的部分的弧长为

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \\ &= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt \\ &= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{3a}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}. \end{aligned}$$



因此由对称性知星形线的弧长为 $4 \cdot \frac{3a}{2} = 6a$.

【例 1.5】 设 $x_0 > 0$, 且 $M(x_0, y_0)$ 是抛物线 $y = x^2/2p$ ($p > 0$) 上的一个点, 则曲线段 \widehat{OM} 的弧长为

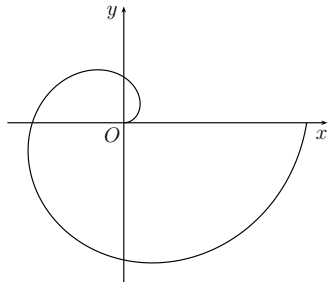
$$s = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{1}{p} \int_0^{x_0} \sqrt{x^2 + p^2} dx$$

由第七章例 2.9 知

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2p} \left[x\sqrt{x^2 + p^2} + p^2 \log(x + \sqrt{x^2 + p^2}) \right] \Big|_0^{x_0} \\ &= \frac{x_0\sqrt{x_0^2 + p^2}}{2p} + \frac{p}{2} \log \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 + p^2}}{p}. \end{aligned}$$

【例 1.6】 对 Archimedes 螺线 (Archimedean spiral) $r = a\theta$ ($a > 0$) 而言, 其第一圈的弧长 (如右图所示) 为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta \\ &= \frac{a}{2} \left[\theta\sqrt{\theta^2 + 1} + \log(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}) \right] \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{a}{2} \left[2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \log(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}) \right]. \end{aligned}$$



【例 1.7】 设 $a > 0$, $b > 0$, 求圆柱螺旋线

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

位于 $(a, 0, 0)$ 和 $(a, 0, 2\pi b)$ 之间的一段曲线的弧长。

解. 这两点分别对应于参数 $t = 0$ 和 $t = 2\pi$, 因此所求的弧长为

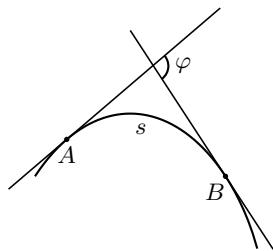
$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

□

接下来我们简单介绍一下平面曲线的曲率, 这一概念的引入是为了考察曲线在某点处的“弯曲程度”。在这里我们只对此作一些直观的讨论, 更细致和全面的介绍将在《微分几何》课程中给出。

设 A, B 是曲线上的两点, 我们首先来看如何去刻画曲线段 \widehat{AB} 的“弯曲程

度”。如图所示，一方面需考虑曲线从 A 到 B 的“旋转角度”，这可通过切线方向的变化角度 φ 来度量；另一方面，对于两条“旋转角度”相同的曲线而言，弧长较小者的“弯曲程度”应当更大。因此用 φ 与曲线段 \widehat{AB} 的弧长 s 的比值 $\frac{\varphi}{s}$ 来刻画曲线段的“弯曲程度”是一个合理的选择，我们将这一比值称为曲线段 \widehat{AB} 的平均曲率。



例如对半径为 R 的圆来说有 $s = R\varphi$ ，因此圆上任意一段的平均曲率均相同且等于 $\frac{1}{R}$ ，这一相等性与我们的预想是相同的。

按照极限的思想，我们可以从平均曲率的概念引出曲线上某点处的曲率的概念。具体来说，当 B 点沿曲线向 A 趋近时，若曲线段 \widehat{AB} 的平均曲率趋于某定值，我们则将该定值称为曲线在 A 点处的曲率 (curvature)。

我们接下来讨论曲率的计算问题。设曲线由参数方程 (16.2) 给出，其中 $x(t)$ 与 $y(t)$ 均在 $[a, b]$ 上二阶连续可导，且 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2$ 在 $[a, b]$ 上不等于 0^①。因为要考虑点沿曲线的运动，故需对曲线定向，在此我们按照参数 t 的增长来确定曲线的方向。现设 A, B 分别是曲线上对应于参数 t 与 $t + \Delta t$ 的两点，令 $\Delta t \rightarrow 0$ ^② 可得 A 点的曲率为

$$k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|,$$

其中 $\Delta\theta$ 表示从 B 到 A 切线方向的变化角度， Δs 表示曲线段 \widehat{AB} 的弧长。

首先来计算 $\Delta\theta$ 。众所周知，曲线在 A 点和 B 点处的切线斜率分别为

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{及} \quad \frac{y'(t + \Delta t)}{x'(t + \Delta t)}$$

(若 $x'(t) = 0$ 且 $y'(t) \neq 0$ ，则约定 A 点处的切线斜率为 $+\infty$)。现记

$$\theta(t) = \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \theta(t + \Delta t) = \arctan \frac{y'(t + \Delta t)}{x'(t + \Delta t)},$$

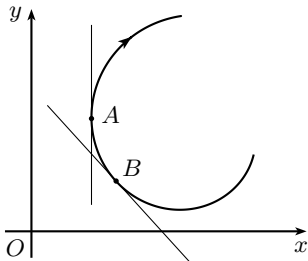
则 $\theta(t)$ 与 $\theta(t + \Delta t)$ 均位于区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内，其中 $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ 当且仅当 $x'(t) = 0$ 且 $y'(t) \neq 0$ 。尽管 $\theta(t)$ 在一般情况下并非曲线在 A 点处的切线与 x 轴正向之间的夹角

^①虽然这一条件在后面计算中会被用到，但读者也可从直观上想一下这一条件的必要性。

^②因为已对曲线定向，故而这里的 $\Delta t \rightarrow 0$ 也即是 $\Delta t \rightarrow 0^-$ 。

(因为当 $\frac{y'(t)}{x'(t)} < 0$ 时, 该切线与 x 轴正向之间的夹角应为 $\pi + \theta(t)$), 但我们却可用 $\theta(t + \Delta t) - \theta(t)$ 去衡量从 B 到 A 切线方向的变化角度。事实上, 因为正切函数以 π 为周期, 故必存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得

$$|\Delta\theta| = |\theta(t + \Delta t) - \theta(t) + n\pi|.$$



但注意到 $\theta(t + \Delta t)$ 与 $\theta(t)$ 均属于 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 所以上

述 n 只能取 0 或 1, 并且 $n = 1$ 当且仅当 $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ 且 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \theta(t + \Delta t) = -\frac{\pi}{2}$ (如上图所示)。因而可分如下三种情况进行讨论:

(1) $\theta(t) \neq \frac{\pi}{2}$ 。此时有 $|\Delta\theta| = |\theta(t + \Delta t) - \theta(t)|$, 从而

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} \right| = |\theta'(t)| = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}.$$

(2) $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ 且 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \theta(t + \Delta t) = \frac{\pi}{2}$ 。在这种情况下, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $\frac{y'(t + \Delta t)}{x'(t + \Delta t)} > 0$, 于是当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时^③

$$\begin{aligned} |\Delta\theta| &= \left| \theta(t + \Delta t) - \frac{\pi}{2} \right| = \left| \arctan \frac{y'(t + \Delta t)}{x'(t + \Delta t)} - \frac{\pi}{2} \right| \\ &= \left| \arctan \frac{x'(t + \Delta t)}{y'(t + \Delta t)} \right| = \left| \arctan \frac{x'(t + \Delta t)}{y'(t + \Delta t)} - \arctan \frac{x'(t)}{y'(t)} \right|, \end{aligned}$$

进而有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d}{dt} \left(\arctan \frac{x'(t)}{y'(t)} \right) \right| = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}.$$

(3) $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ 且 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \theta(t + \Delta t) = -\frac{\pi}{2}$ 。此时

$$\begin{aligned} |\Delta\theta| &= |\theta(t + \Delta t) - \theta(t) + \pi| = \left| \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y'(t + \Delta t)}{x'(t + \Delta t)} \right| \\ &= \left| \frac{\pi}{2} - \arctan \left(-\frac{y'(t + \Delta t)}{x'(t + \Delta t)} \right) \right| \end{aligned}$$

注意到在这种情况下当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $\frac{y'(t + \Delta t)}{x'(t + \Delta t)} < 0$, 因此

$$|\Delta\theta| = \left| \arctan \left(-\frac{x'(t + \Delta t)}{y'(t + \Delta t)} \right) \right| = \left| \arctan \frac{x'(t + \Delta t)}{y'(t + \Delta t)} - \arctan \frac{x'(t)}{y'(t)} \right|.$$

^③注意到对任意的正实数 α 均有 $\arctan \alpha + \arctan \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$ 。

于是得到

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d}{dt} \left(\arctan \frac{x'(t)}{y'(t)} \right) \right| = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}.$$

综合以上三种情形, 我们总有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right| = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}. \quad (16.8)$$

再来计算 Δs , 由命题 1.3 知

$$|\Delta s| = \left| \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \right|,$$

因此

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}. \quad (16.9)$$

由 (16.8) 和 (16.9) 可得 A 点的曲率为

$$k = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (16.10)$$

若曲线由方程 $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) 给出, 其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶连续可导, 则可将 x 视为参数, 从而得到该曲线在点 $(x, f(x))$ 处的曲率为

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

此外, 若曲线由极坐标方程 $r = r(\theta)$ ($\theta \in [\alpha, \beta]$) 所定义, 其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上二阶连续可导, 则可将该曲线视为由参数方程 (16.6) 给出, 于是由 (16.10) 知曲线上对应于 θ 的点处的曲率为

$$k = \frac{|[r(\theta)]^2 + 2[r'(\theta)]^2 - r(\theta)r''(\theta)|}{([r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

【例 1.8】 抛物线 $y = x^2$ 上以 x 为横坐标的点处的曲率为

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

^④所以人们常把 $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ 称为弧长的微分。

习题 16.1

1. 计算下列平面曲线段的弧长:

(1) $y = x^{\frac{3}{2}}$ ($0 \leq x \leq 4$);

(2) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\log y$ ($1 \leq y \leq e$);

(3) 摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), 其中 $a > 0$;

(4) $x = a \cos^4 t$, $y = a \sin^4 t$, 其中 $a > 0$;

(5) 心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$, 其中 $a > 0$;

(6) $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$, 其中 $a > 0$.

2. 计算下列空间曲线段的弧长:

(1) $x = 2t$, $y = t^2$, $z = \log t$ ($1 \leq t \leq 2$);

(2) $x^2 + y^2 = cz$ 与 $y = x \tan \frac{z}{c}$ 的交线, 从 $(0, 0, 0)$ 到 (x_0, y_0, z_0) 的一段, 其中 $c > 0$.

3. 设 $a > 0$, 证明空间中的 Viviani 曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

与平面上的椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = a^2$ 有相同的弧长。

4. 求下列曲线在指定点处的曲率:

(1) $y = \log x$, 在点 $(1, 0)$ 处;

(2) 摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$), 在 $t \neq 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) 的点处;

(3) 对数螺线 $r = ae^{b\theta}$ ($a, b > 0$), 在 (r_0, θ_0) 处;

(4) 双纽线 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ ($a > 0$), 在 $r \neq 0$ 的点处。

5. 设简单曲线 C 由 (16.1) 所定义, 且 $x(t)$, $y(t)$ 与 $z(t)$ 均在 $[a, b]$ 上连续可微, 我们记 $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))^T$ 又设 $L = (L_1, L_2, L_3)^T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是正交变换, 证明

$$\left(\frac{d(L_1 \circ \mathbf{r})}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(L_2 \circ \mathbf{r})}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(L_3 \circ \mathbf{r})}{dt} \right)^2 = [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2,$$

进而得到 C 的弧长在正交变换下保持不变。

§ 16.2

第一型曲线积分

作为一个引子, 我们来考虑这样的一个问题: 设 C 是 \mathbb{R}^3 中的一条可求长曲线, A 和 B 是它的两个端点, 曲线上分布着线密度为 $\rho(x, y, z)$ 的某种物质, 如何求其质量? 一个常规的做法是, 沿曲线依次取若干个

$$A = M_0, M_1, \dots, M_n = B,$$

并在每个曲线段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上取一个点 ξ_i , 那么当 n 充分大且 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的弧长 (记作 Δs_i) 均充分小时, 可用 $\rho(\xi_i)\Delta s_i$ 来近似计算曲线段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的质量, 于是 C 的质量近似于

$$\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i)\Delta s_i.$$

当分点个数逐渐增加, 且 $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i \rightarrow 0$ 时, 如果上述和式趋于某有限数, 那么就可以把这一有限数当作 C 的质量。

上述例子引出了第一型曲线积分的定义。

【定义 2.1】 设 C 是 \mathbb{R}^3 中的一条可求长曲线, 其两端点是 A 和 B (若 C 是闭曲线, 则 A 与 B 是同一个点), f 是定义在 C 上的一个函数。若存在实数 I , 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 当我们在曲线 C 上依次取分点

$$A = M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = B$$

时, 只要 $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i < \delta$ (其中 Δs_i 表示曲线段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的弧长), 就对任意的 $\xi_i \in \widehat{M_{i-1}M_i}$ ($1 \leq i \leq n$) 有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta s_i - I \right| < \varepsilon, \quad (16.11)$$

那么就称 I 为 f 在 C 上的第一型曲线积分 (line integral of the first kind), 记作

$$I = \int_C f(x, y, z) ds.$$

特别地, 当 C 是闭曲线时, 我们也采用记号

$$I = \oint_C f(x, y, z) ds.$$

类似可定义与 \mathbb{R}^2 中的曲线相关的第一型曲线积分。

【注 2.2】 如果第一型曲线积分存在, 那么它的值与曲线的定向无关。

由定义容易证明下面与重积分类似的性质。

【命题 2.3】 设 C 是 \mathbb{R}^3 中的一条可求长曲线, f 与 g 是定义在 C 上的两个函数,

- (1) 如果 f 与 g 在 C 上的第一型曲线积分都存在, 则对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ 在 C 上的第一型曲线积分存在, 并且

$$\int_C (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) ds = \alpha \int_C f(x, y, z) ds + \beta \int_C g(x, y, z) ds.$$

- (2) 若 $C = C_1 \cup C_2$, 其中 C_1 与 C_2 均是可求长曲线, 且它们可能的公共点均是端点, 那么当 f 在 C_1 和 C_2 上的第一型曲线积分均存在时, f 在 C 上的第一型曲线积分也存在, 并且

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{C_1} f(x, y, z) ds + \int_{C_2} f(x, y, z) ds.$$

下面让我们来看看如何计算第一型曲线积分。设 C 是一个光滑曲线段, 也即是说它可由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

给出, 且 $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 均在 $[a, b]$ 上连续可微。又设 f 是定义在 C 上的连续函数。现考虑 $[a, b]$ 的一个分划

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

并在每个子区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 中各选一个点 ξ_i , 那么 (16.11) 中的求和也即

$$\sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \Delta s_i. \quad (16.12)$$

由弧长公式 (16.3) 及积分第一中值定理知

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \sqrt{[x'(\eta_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2 + [z'(\eta_i)]^2} \cdot \Delta t_i,$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ 。将这代入 (16.12) 可得

$$\sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \sqrt{[x'(\eta_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2 + [z'(\eta_i)]^2} \cdot \Delta t_i.$$

为了弥补由上式中同时出现 ξ_i 及 η_i 所带来的不均衡, 我们利用 Minkowski 不等式 (第二章推论 4.4) 得到

$$\begin{aligned} & \sqrt{[x'(\eta_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2 + [z'(\eta_i)]^2} - \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2 + [z'(\xi_i)]^2} \\ & \leq \sqrt{[x'(\eta_i) - x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i) - y'(\xi_i)]^2 + [z'(\eta_i) - z'(\xi_i)]^2}. \end{aligned} \quad (16.13)$$

注意到 $x'(t)$, $y'(t)$ 及 $z'(t)$ 的连续性蕴含了它们在 $[a, b]$ 上的一致连续性, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i < \delta$ 时就有

$$\begin{cases} |x'(\eta_i) - x'(\xi_i)| < \varepsilon, \\ |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)| < \varepsilon, \\ |z'(\eta_i) - z'(\xi_i)| < \varepsilon, \end{cases}$$

此时 (16.13) 右边不超过 $\sqrt{3}\varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \Delta s_i \\ & = \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2 + [z'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta t_i + O((b-a)M\varepsilon), \end{aligned}$$

其中 $M = \max_{t \in [a, b]} |f(x(t), y(t), z(t))|$, 并且 O 常数是一个绝对常数. 因为上式右边的和式恰是定积分

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

所对应的 Riemann 和, 所以通过一个极限的讨论可以立即得到

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (16.14)$$

类似地, 如果 C 是 \mathbb{R}^2 中由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

所给出的曲线段, 其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均在 $[a, b]$ 上连续可微, 那么对于任意一个在 C 上连续的函数 f 均有

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

特别地, 当 C 有显式表达 $y = \varphi(x)$ ($a \leq x \leq b$) 且 φ 在 $[a, b]$ 上连续可微时,

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} dx.$$

【例 2.4】 设 C 是四分之一圆周 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 求

$$\int_C y \, ds.$$

解. C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

因此

$$\int_C y \, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = 1.$$

□

【例 2.5】 设 C 是星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$), 求 $\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) \, ds$.

解. 利用隐函数的求导法可得 $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, 于是

$$\sqrt{1 + y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

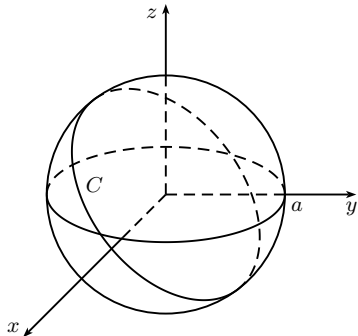
从而

$$\begin{aligned} \int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) \, ds &= 4 \int_0^a \left(x^{\frac{4}{3}} + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^2\right) \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \, dx \\ &= 4a^{\frac{1}{3}} \int_0^a (2x - 2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{1}{3}}) \, dx = 4a^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

本例也可通过参数方程 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ 来求解。 □

【例 2.6】 设 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 计算 $\int_C x^2 \, ds$.

解. 方法一: 我们来寻找 C 的参数方程, 这或许可通过一些简便的方式得到, 但下面我们叙述一个较为通用的方法。注意到 C 是位于平面 $x + y + z = 0$ 上的以原点为中心, 以 a 为半径的圆, 因此若能利用坐标变换将平面 $x + y + z = 0$ 变换为新坐标系下的某个坐标平面, 那么参数方程将很容易获取。



在平面 $x + y + z = 0$ 上任取两个正交的向量, 例如 $(1, -1, 0)^T$ 和 $(1, 1, -2)^T$. 将它们与该平面的法向量 $(1, 1, 1)^T$ 放在一起就形成了一个正交组, 我们希望把它们单位化后当作新坐标下的单位坐标向量. 现将这三个向量单位化后组成一个矩阵

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

这即是我们所需要的坐标变换的过渡矩阵, 因此可作变量替换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (16.15)$$

由于 M 是正交矩阵, 所以可将上式写成

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = M^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

也即

$$u = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x + y - 2z}{\sqrt{6}}, \quad w = \frac{x + y + z}{\sqrt{3}}.$$

在此坐标变换下 C 的方程变为

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = a^2, \\ w = 0. \end{cases}$$

相应地, 利用 (16.15) 可得

$$\int_C x^2 ds = \int_C \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} + \frac{w}{\sqrt{3}} \right)^2 ds.$$

再作替换 $u = a \cos t$, $v = a \sin t$, $w = 0$ 可得

$$\begin{aligned} \int_C x^2 ds &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a \cos t}{\sqrt{2}} + \frac{a \sin t}{\sqrt{6}} \right)^2 \cdot a dt \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{6} + \frac{\sin^2 t}{6} \right) dt = \frac{2\pi}{3} a^3. \end{aligned}$$

方法二：这是一种更为巧妙的做法。由对称性知

$$\int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds,$$

因此

$$\int_C x^2 ds = \frac{1}{3} \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a^2}{3} \int_C ds = \frac{2\pi}{3} a^3.$$

□

习题 16.2

1. 计算下列第一型曲线积分：

(1) $\int_C xy ds$, 其中 C 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 在第一象限内的部分；

(2) $\int_C y^2 ds$, 其中 C 是摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)；

(3) $\int_C z ds$, 其中 C 是圆锥螺线 $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ ($0 \leq t \leq t_0$)；

(4) $\int_C yz ds$, 其中 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线；

(5) $\int_C z ds$, 其中 C 是 Viviani 曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 满足 $z \geq 0$ 的那一部分。

2. 设 C 是圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$)，点 (u, v) 不在 C 上。利用 §14.1 习题 6 的结果计算第一型曲线积分

$$I(u, v) = \int_C \log \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}} ds.$$

$I(u, v)$ 被称为单层对数位势。

§ 16.3

第二型曲线积分

首先来看一个物理问题。设 C 是 \mathbb{R}^3 中的一条曲线段，端点分别为 A 和 B 。某质点在力 \mathbf{F} 的作用下沿曲线从 A 到 B 运动，力 \mathbf{F} 的大小和方向仅与质点的位置有

关, 因此我们可以把它写成 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 的形式, 现问在这一运动过程中力所做的功 W 是多少? 为了解决这一问题, 我们可以在 C 上从 A 到 B 依次取若干点

$$A = M_0, M_1, \dots, M_n = B,$$

当分点个数足够多且对曲线段的分划足够细时, 一方面可将质点沿弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的运动近似看作是沿线段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 的运动, 另一方面也可在这一弧段上把力近似看作是一个常力 $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_i)$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_i \in \widehat{M_{i-1}M_i}$, 从而 W 近似于

$$\sum_{i=1}^n \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \rangle,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示向量的内积。当然, 如果逐渐增加分点个数使得曲线段被这些分点划得越来越细, 那么上述和式将趋于 W 的真实值。这个例子引出了如下第二型曲线积分的定义。

【定义 3.1】 设 C 是 \mathbb{R}^3 中的一条定向的可求长曲线, 起点为 A , 终点为 B , 在 C 上定义了映射 $f = (P, Q, R)^T : C \rightarrow \mathbb{R}^3$ 。若存在实数 I , 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 当我们在 C 上从 A 到 B 依次取分点

$$A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$$

时, 只要 $\max_{1 \leq i \leq n} \overline{M_{i-1}M_i} < \delta$, 就对任意的 $\boldsymbol{\xi}_i \in \widehat{M_{i-1}M_i}$ 有

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \rangle - I \right| < \varepsilon,$$

则称 I 为 $f = (P, Q, R)^T$ 沿定向曲线 C 的第二型曲线积分 (line integral of the second kind), 也称作 f 沿道路 \widehat{AB} 的第二型曲线积分, 记作

$$I = \int_C P dx + Q dy + R dz = \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz. \quad \textcircled{5}$$

特别地, 当 C 是闭曲线时, 我们也采用记号

$$I = \oint_C P dx + Q dy + R dz.$$

^⑤之所以采用这种记号, 是因为如果将 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 写成 $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)^T$ 的形式, 那么

$$\sum_{i=1}^n \langle \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \rangle = \sum_{i=1}^n (P(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta x_i + Q(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta y_i + R(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta z_i).$$

【注 3.2】 在计算第二型曲线积分时, 特别需要注意的是曲线的定向, 因为对于以 A, B 为端点的同一条曲线而言, 由定义知

$$\int_{\widehat{BA}} P dx + Q dy + R dz = - \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz.$$

利用定义容易证明下述命题。

【命题 3.3】 设 \widehat{AB} 是 \mathbb{R}^3 中的一条可求长的定向曲线, $f = (P_1, Q_1, R_1)^T$ 和 $g = (P_2, Q_2, R_2)^T$ 均是从 \widehat{AB} 到 \mathbb{R}^3 的映射。

(1) 若 f 与 g 沿 \widehat{AB} 的第二型曲线积分都存在, 则对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ 沿 \widehat{AB} 的第二型曲线积分也存在, 并且其值等于

$$\alpha \left(\int_{\widehat{AB}} P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz \right) + \beta \left(\int_{\widehat{AB}} P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz \right).$$

(2) 设 D 是定向曲线 \widehat{AB} 上的一点, 如果 f 沿 \widehat{AD} 和 \widehat{DB} 的第二型曲线积分均存在, 则 f 沿 \widehat{AB} 的第二型曲线积分也存在, 且其值等于

$$\left(\int_{\widehat{AD}} P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz \right) + \left(\int_{\widehat{DB}} P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz \right).$$

下面来看第二型曲线积分的计算。假设定向曲线 \widehat{AB} 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

给出, t 在以 a, b 为端点的区间中变化, 且 $x(t), y(t)$ 和 $z(t)$ 均在该区间上连续可微。又设参数 $t = a$ 对应于点 A , 参数 $t = b$ 对应于点 B 。再设

$$f = (P, Q, R)^T : \widehat{AB} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

是连续映射。现考虑以 a, b 为端点的区间的一个分划

$$a = t_0, t_1, \dots, t_n = b,$$

使得点列 $\{t_n\}$ 是单调的。记 $M_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$, 并在弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任取一个点 $\xi_i = (x(\eta_i), y(\eta_i), z(\eta_i))^T$, 于是有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \langle f(\xi_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left[P(\xi_i)(x(t_i) - x(t_{i-1})) + Q(\xi_i)(y(t_i) - y(t_{i-1})) + R(\xi_i)(z(t_i) - z(t_{i-1})) \right]. \end{aligned} \tag{16.16}$$

由 Lagrange 中值定理知, 对 $1 \leq i \leq n$, 存在位于 t_{i-1} 与 t_i 之间的实数 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 使得

$$\begin{cases} x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\alpha_i)\Delta t_i, \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\beta_i)\Delta t_i, \\ z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\gamma_i)\Delta t_i, \end{cases}$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ 。将这代入 (16.16) 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left[P(x(\eta_i), y(\eta_i), z(\eta_i)) \cdot x'(\alpha_i) + Q(x(\eta_i), y(\eta_i), z(\eta_i)) \cdot y'(\beta_i) \right. \\ & \quad \left. + R(x(\eta_i), y(\eta_i), z(\eta_i)) \cdot z'(\gamma_i) \right] \Delta t_i. \end{aligned}$$

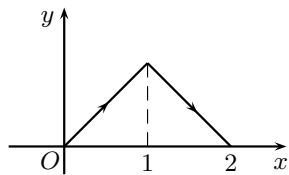
由于 P, Q, R 在曲线上连续, 并且 $x(t), y(t), z(t)$ 连续可微, 所以与上节的讨论类似, 我们可以将 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 均换成 η_i , 代价是添加一个余项, 该余项在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时趋于 0。于是通过一个极限的讨论可由定义 3.1 得到

$$\begin{aligned} \int_{\overrightarrow{BA}} P dx + Q dy + R dz &= \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \right. \\ & \quad \left. + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt. \end{aligned}$$

【例 3.4】 计算第二型曲线积分

$$I = \int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy,$$

其中 C 为平面上的折线 $y = 1 - |1 - x|$ ($0 \leq x \leq 2$), C 的方向为由原点出发经过点 $(1, 1)$ 再到点 $(2, 0)$ 。



解. C 的方程为

$$y = \begin{cases} x, & \text{若 } x \in [0, 1], \\ 2 - x, & \text{若 } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [(x^2 + x^2) + (x^2 - x^2)] dx + \int_1^2 [(x^2 + (2-x)^2) - (x^2 - (2-x)^2)] dx \\ &= \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 2(2-x)^2 dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

□

【例 3.5】 计算第二型曲线积分

$$I = \oint_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2},$$

其中 C 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$), 方向为逆时针方向。

解. 利用参数方程 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{(a \sin t)(b \cos t)' - (b \cos t)(a \sin t)'}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\ &= -ab \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = -2ab \int_0^{\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}. \end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan t)}{a^2 + b^2 \tan^2 t} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{b \tan t}{a} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2ab},$$

再利用对称性可得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} = \frac{\pi}{2ab},$$

于是最终得到 $I = -2\pi$ 。

我们会在下一节对这个例子进行推广。 □

【例 3.6】 计算第二型曲线积分

$$I = \int_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

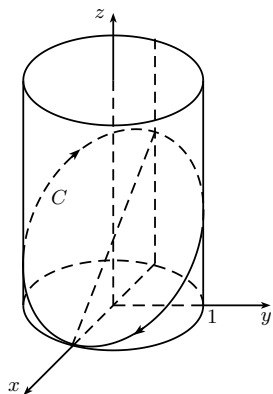
其中 C 是 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $x + z = 1$ 的交线, 方向从 x 轴正方向看是顺时针方向。

解. C 在 Oxy 平面上的投影是单位圆, 因此 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \\ z = 1 - \cos \theta. \end{cases}$$

注意到 C 的方向导致它在 Oxy 平面上的投影的方向也是顺时针方向的, 故而 θ 从 2π 变化到 0 , 于是

$$I = \int_{2\pi}^0 [(\sin \theta - 1 + \cos \theta)(-\sin \theta) + (1 - 2 \cos \theta) \cos \theta + (\cos \theta - \sin \theta) \sin \theta] d\theta$$



$$= \int_{2\pi}^0 (-2 + \sin \theta + \cos \theta) d\theta = 4\pi.$$

□

最后来看两类曲线积分之间的联系。假设 \widehat{AB} 是 \mathbb{R}^3 中的一个定向的可求长曲线段，且它的方程可用弧长作为参数表示出来

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \\ z = z(s), \end{cases} \quad s \in [0, \ell],$$

其中 ℓ 是 \widehat{AB} 的弧长， s 从 0 单调增加至 ℓ 的方向为曲线的方向，并且 $x(s)$, $y(s)$ 和 $z(s)$ 均在 $[0, \ell]$ 上连续可微。又设 $f = (P, Q, R)^T$ 是定义在 \widehat{AB} 上的连续映射，那么

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_0^\ell (P \cdot x'(s) + Q \cdot y'(s) + R \cdot z'(s)) ds.$$

向量 $(x'(s), y'(s), z'(s))^T$ 是 \widehat{AB} 在点 $(x(s), y(s), z(s))$ 处的切向量，并且对弧长的计算公式

$$s = \int_0^s \sqrt{[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 + [z'(s)]^2} ds$$

求导可得 $\sqrt{[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 + [z'(s)]^2} = 1$ ，这说明 $(x'(s), y'(s), z'(s))^T$ 是 \widehat{AB} 在点 $(x(s), y(s), z(s))$ 处的单位切向量，现用 \mathbf{t} 表示这一切向量，那么

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_0^\ell \langle f, \mathbf{t} \rangle ds.$$

按照第一型曲线积分的计算公式 (16.14)，上式右边恰是

$$\int_{\widehat{AB}} \langle f, \mathbf{t} \rangle ds,$$

因此我们最终得到

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\widehat{AB}} \langle f, \mathbf{t} \rangle ds. \quad (16.17)$$

进一步地，如果用 (\mathbf{t}, x) , (\mathbf{t}, y) 和 (\mathbf{t}, z) 分别表示 \mathbf{t} 与三个坐标轴正向的夹角，则

$$x'(s) = \cos(\mathbf{t}, x), \quad y'(s) = \cos(\mathbf{t}, y), \quad z'(s) = \cos(\mathbf{t}, z),$$

从而有

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\widehat{AB}} (P \cdot \cos(\mathbf{t}, x) + Q \cdot \cos(\mathbf{t}, y) + R \cdot \cos(\mathbf{t}, z)) ds.$$

值得一提的是, (16.17) 从表面上看是建立了两类曲线积分之间的联系, 但同时也说明了在适当条件下可以用第一型曲线积分来定义第二型曲线积分。我们在 §17.4 定义第二型曲面积分时采用这一思想。

习题 16.3

1. 计算下列第二型曲线积分:

(1) $\int_C (x-y) dx + (y-x) dy$, 其中 C 是曲线段 $y = x^3$ ($0 \leq x \leq 1$), 方向从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$;

(2) $\int_C y dx + x^2 dy$, 其中 C 是抛物线段 $y = 4 - (x-1)^2$ ($-1 \leq x \leq 3$), 方向从 $(3,0)$ 到 $(-1,0)$;

(3) $\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, 其中 C 是以 $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ 和 $(0,-1)$ 为顶点的正方形的边界, 方向沿逆时针方向;

(4) $\int_C (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$, 其中 C 是由参数方程 $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ ($0 \leq t \leq 1$) 给出的曲线, 方向沿参数 t 增加的方向;

(5) $\int_C y dx + z dy + x dz$, 其中 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 方向从 z 轴正方向看是逆时针方向;

(6) $\int_C (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$, 其中 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 与平面 $y = x \tan \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$) 的交线, 方向从 x 轴正方向看是逆时针方向。

2. 设 C 是光滑曲线段, 弧长为 s 。又设函数 P, Q 在 C 上连续。证明

$$\left| \int_C P dx + Q dy \right| \leq Ms,$$

其中 $M = \max_{(x,y) \in C} \sqrt{P(x,y)^2 + Q(x,y)^2}$ 。

3. 记

$$I_R = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

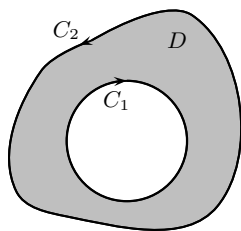
证明 $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = 0$ 。

§ 16.4

Green 公式

本节的目的是建立平面区域上的二重积分与沿该区域边界的第二型曲线积分之间的联系, 在此之前, 首先介绍区域边界的定向。

设 D 是 \mathbb{R}^2 中的一个有界闭区域, 其边界 ∂D 由有限多条光滑曲线组成。所谓 ∂D 的正向是指这样的方向, 它使得一个人在 ∂D 上沿着该方向行走时, 与之相邻的区域的内部总是在他的左边。例如右图所示的闭区域的边界由两条曲线 C_1 和 C_2 组成, 那么 ∂D 的正向应当是: 曲线 C_1 的方向为顺时针方向, 曲线 C_2 的方向为逆时针方向。今后, 在沿封闭曲线作第二型曲线积分时, 在不加说明的情况下我们总默认曲线的定向为正向。



下面我们从研究一些简单区域开始。设

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), x \in [a, b]\}, \quad (16.18)$$

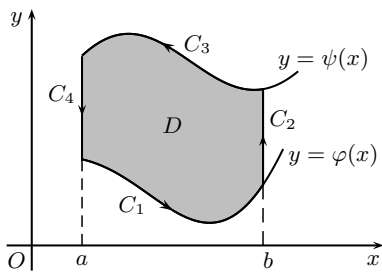
其中 φ 与 ψ 均在 $[a, b]$ 上连续, $P(x, y)$ 是定义在 D 上的连续可微函数, 我们来计算第二型曲线积分

$$\int_{\partial D} P dx.$$

如右图所示, $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, 其中

$$\int_{C_2} P dx = \int_{C_4} P dx = 0,$$

因此



$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P dx &= \int_{C_1} P dx + \int_{C_3} P dx \\ &= \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx + \int_b^a P(x, \psi(x)) dx \\ &= \int_a^b (P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x))) dx = - \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy, \end{aligned}$$

其中最后一步用到了 Fubini 定理 (第十五章定理 4.3)。

现设 S 是 \mathbb{R}^2 中的一个有界闭区域, 若

$$S = \bigcup_{i=1}^n D_i,$$

其中 D_i 两两无公共内点且均是形如 (16.18) 的闭区域, 那么对于在 S 上连续可微的函数 P 有

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} P dx.$$

注意到若 D_i 与 D_j 有公共边界, 那么 ∂D_i 与 ∂D_j 在这一公共边界上的方向恰好相反, 从而在该公共边界上的第二型曲线积分互相抵消, 因此有

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial S} P dx.$$

类似地, 对于形如

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), y \in [c, d]\} \quad (16.19)$$

的闭区域以及在 E 上连续可微的函数 $Q(x, y)$ 有

$$\int_{\partial E} Q dy = \iint_E \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

进而对于那些能写成两两无公共内点的形如 (16.19) 的闭区域的并的闭区域 S , 以及在 S 上连续可微的函数 Q , 我们也有

$$\int_{\partial S} Q dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

综合以上两种情况, 如果 S 是 \mathbb{R}^2 中的有界闭区域, 并且它既能写成有限多个两两无公共内点的形如 (16.18) 的闭区域的并, 也能写成有限多个两两无公共内点的形如 (16.19) 的闭区域的并, 那么对于在 S 上连续可微的函数 P 与 Q 有

$$\int_{\partial S} P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

考虑到许多闭区域均满足以上条件, 我们不加证明地给出下述结论。

【定理 4.1】(Green 公式) 设 S 是 \mathbb{R}^2 中的有界闭区域, ∂S 由有限多条分段光滑曲线组成, 若 $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 均在 S 上连续, 则

$$\int_{\partial S} P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (16.20)$$

其中 ∂S 的定向为正向。

在历史上, G. Green 于 1828 年在其著作《论数学分析在电磁理论中的应用》中对三维的情况提出了以他名字命名的定理, 该文后被 W. Thomson (也被称为 Kelvin 勋爵) 于 1850 ~ 1854 年发表于 Crelle 杂志^[19] ⑥。本节中所述的 Green 公式事实上是由 Cauchy 于 1846 年给出的。

在定理 4.1 的条件下, 再设 $u(x, y)$ 在 S 上连续可微, 那么将 (16.20) 中的 P 换成 uP , 并取 $Q = 0$ 可得

$$\int_{\partial S} uP dx = - \iint_S \frac{\partial(uP)}{\partial y} dx dy = - \iint_S \left(P \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

也即

$$- \iint_S u \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial S} uP dx + \iint_S P \frac{\partial u}{\partial y} dx dy. \quad (16.21)$$

同理, 在 (16.20) 中取 $P = 0$, 并将 Q 换成 uQ 可得

$$\iint_S u \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\partial S} uQ dy - \iint_S Q \frac{\partial u}{\partial x} dx dy. \quad (16.22)$$

上面两式相加即得

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) u dx dy = \int_{\partial S} u(P dx + Q dy) - \iint_S \left(Q \frac{\partial u}{\partial x} - P \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy. \quad (16.23)$$

以上三式均被称作平面上的分部积分公式。

我们可以利用 Green 公式将第二型曲线积分的计算转化为计算重积分。

⑥一个后期整合的版本参见 arXiv:0807.0088v1 [physics.hist-ph]。

【例 4.2】 设 C 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$), 方向为逆时针方向, 计算

$$I = \int_C (x + y) dx - (x - y) dy.$$

解. 用 D 表示 C 所围成的闭区域, 并记 $P = x + y$, $Q = y - x$, 则由 Green 公式知

$$I = \iint_D -2 dx dy = -2\pi a^2.$$

□

下面的例子是例 3.5 的推广。

【例 4.3】 设 S 是 \mathbb{R}^2 中的一个有界闭区域, $\mathbf{0} = (0, 0) \in S^\circ$, 且 ∂S 由有限多条光滑曲线组成, 计算

$$I = \int_{\partial S} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2},$$

其中 ∂S 的方向为沿曲线正向。

解. 因为 $\mathbf{0} \in S^\circ$, 故存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(\mathbf{0}, \varepsilon) \subseteq S^\circ$ 。为方便起见, 我们记 $D = B(\mathbf{0}, \varepsilon)$, 并用 C 表示其边界。再记 $P = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{-x}{x^2 + y^2}$, 那么当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

于是在 $S \setminus D$ 上应用 Green 公式可得

$$\left(\int_{\partial S} P dx + Q dy \right) - \left(\int_C P dx + Q dy \right) = \iint_{S \setminus D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

上式中 C 的方向为逆时针方向。从而

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial S} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy = \int_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_C y dx - x dy. \end{aligned}$$

再次应用 Green 公式可得

$$I = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\bar{D}} (-2) dx dy = -2\pi.$$

□

Green 公式使得人们可通过曲线积分计算闭曲线所围区域的面积,事实上,在上例解答中的最后一步我们已经这么做了。

设 S 是 \mathbb{R}^2 中的一个有界闭区域,且 ∂S 由有限多条光滑曲线组成,那么由 Green 公式知

$$\mu(S) = \iint_S dx dy = \int_{\partial S} x dy = - \int_{\partial S} y dx. \quad (16.24)$$

当然,进一步地有

$$\mu(S) = \frac{1}{2} \int_{\partial S} x dy - y dx. \quad (16.25)$$

【例 4.4】 设 $a, b > 0$, 求星形线

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = b \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

所围闭区域 S 的面积。

解.

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \frac{1}{2} \int_{\partial S} x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[(a \cos^3 t) \cdot (3b \sin^2 t \cos t) - (b \sin^3 t) \cdot (-3a \cos^2 t \sin t) \right] dt \\ &= \frac{3ab}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \pi ab. \end{aligned}$$

□

最后,我们借助 Green 公式来讨论第二型曲线积分与路径无关的问题。

考虑连接平面上两点 A, B 的曲线,在一般情况下,沿不同曲线的第二型曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy \quad (16.26)$$

的值未必相同。现在需要研究的问题是,在什么情况下上述积分的值与曲线的选择无关。为此,先引入单连通区域的概念。

【定义 4.5】 对于 \mathbb{R}^2 中的一个区域 D , 如果 D 中任意一条简单闭曲线所围成的区域均包含于 D , 则称 D 是单连通的 (simply connected), 否则称 D 为多连通的 (multiply connected) 或复连通的。

【定理 4.6】 设 D 是 \mathbb{R}^2 中的一个单连通区域, $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}$ 以及 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 均在 D 上连续, 则下列命题等价:

- (1) 对 D 中任意两点 A, B 以及 D 中从 A 到 B 的任意两条分段光滑曲线 C_1, C_2 有

$$\int_{C_1} P dx + Q dy = \int_{C_2} P dx + Q dy,$$

即第二型曲线积分 (16.26) 与路径无关;

- (2) 对于 D 中由有限多条光滑曲线组成的任一闭曲线 C 有

$$\int_C P dx + Q dy = 0;$$

- (3) 在 D 上有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 。

证明. (1) \Rightarrow (2): 在 C 上任取两个不同的点 A, B , 它们把 C 分成两个曲线段 C_1 与 C_2 。不妨设 C 的方向为沿 C_1 从 A 到 B , 再沿 C_2 从 B 到 A , 从而由 (1) 知

$$\int_{C_1: A \rightarrow B} P dx + Q dy = \int_{C_2: A \rightarrow B} P dx + Q dy.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy &= \int_{C_1: A \rightarrow B} P dx + Q dy + \int_{C_2: B \rightarrow A} P dx + Q dy \\ &= \int_{C_1: A \rightarrow B} P dx + Q dy - \int_{C_2: A \rightarrow B} P dx + Q dy = 0. \end{aligned}$$

- (2) \Rightarrow (3): 反设存在 $\mathbf{a} \in D$ 使得 $\frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{a}) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{a})$ 。不妨设

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{a}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{a}) = \delta > 0$$

于是由 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 的连续性知, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(\mathbf{a}, \varepsilon) \subseteq \overline{B(\mathbf{a}, \varepsilon)} \subseteq D$, 并且在 $\overline{B(\mathbf{a}, \varepsilon)}$ 上有 $\frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{a}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{a}) > \frac{\delta}{2}$, 从而由 Green 公式可得

$$\int_{\partial B(\mathbf{a}, \varepsilon)} P dx + Q dy = \iint_{B(\mathbf{a}, \varepsilon)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy > \frac{\delta}{2} \cdot \pi \varepsilon^2,$$

这与 (2) 矛盾。

(3) \Rightarrow (1): 记 C 为由 C_1 和 C_2 组成的围道, 其方向为沿 C_1 从 A 到 B , 再沿 C_2 从 B 到 A , 又将 C 所围成的闭区域记作 E , 则由 (3) 知

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

因此

$$\int_{C_1} P dx + Q dy = \int_{C_2} P dx + Q dy.$$

□

【例 4.7】 计算第二型曲线积分

$$I = \int_C (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y - x) dy,$$

其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$ 在 x 轴上方的部分, 方向为从原点到点 $A(a, 0)$ 。

解. 记 $P = e^x \sin y - y$, $Q = e^x \cos y - x$, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 。按照定理 4.6, 若用 L 表示从原点到 A 的定向线段, 那么

$$I = \int_L P dx + Q dy = 0.$$

□

习题 16.4

1. 计算下列第二型曲线积分 (曲线方向均是相对于其所围有界闭区域的正向):

(1) $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$, 其中 C 是圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$);

(2) $\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy$, 其中 C 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$);

(3) $\oint_C (e^x + y) dx + \sin(x + y) dy$, 其中 C 是以 $(0, 0)$, $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$ 为顶点的三角形的边界;

(4) $\oint_C (x + y^2) dx + (y + x^2) dy$, 其中 C 是心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$)。

2. 利用 Green 公式计算下列曲线所围有界闭区域的面积:

(1) $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 在第一象限内所围闭区域;

(2) 摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 与 x 轴所围闭区域, 其中 $a > 0$;

- (3) 心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 所围闭区域;
- (4) Descartes 叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy$ ($a > 0$) 在第一象限内所围闭区域;
- (5) 环索线 $y^2 = x^2 \frac{a-x}{a+x}$ ($x \geq 0$) 所围闭区域, 其中 $a > 0$;
- (6) 由曲线 $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ ($a, b, n > 0$) 与坐标轴所围闭区域.
3. 设 $a > 0, c > 0$ 且 $ac - b^2 > 0$. 又设 S 是 \mathbb{R}^2 中的一个有界闭区域, $\mathbf{0} \in S^\circ$, 且 ∂S 由有限多条光滑曲线组成, 计算

$$I = \int_{\partial S} \frac{y dx - x dy}{ax^2 + 2bxy + cy^2},$$

其中 ∂S 的方向为沿曲线正向。

4. 设 \mathbf{l} 是一个给定的非零向量, C 是由有限多条光滑曲线所组成的简单闭曲线, 证明

$$\oint_C \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) ds = 0,$$

其中 \mathbf{n} 是 C 的单位外法向量, (\mathbf{l}, \mathbf{n}) 表示 \mathbf{l} 与 \mathbf{n} 的夹角。

5. 设 C 是曲线段 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$), 方向从 $(0, 0)$ 到 $(\pi, 0)$. 计算

$$\int_C xe^{x^2+y^2} dx + ye^{x^2+y^2} dy.$$

§ 16.5

应用

作为曲线积分理论的应用, 我们来研究调和函数。

【定义 5.1】 设 D 是一个平面 (闭) 区域, f 是定义在 D 上的具有二阶偏导数的函数, 如果在 D 上有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

则称 f 是 D 上的 调和函数 (harmonic function)。

通常记

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

并称 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为 Laplace 算子 (Laplace operator)。

【例 5.2】 证明函数 $f(x, y) = \log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ 是 $\mathbb{R} \setminus \{(x_0, y_0)\}$ 上的调和函数。

解. 通过简单计算可得, 在 $\mathbb{R} \setminus \{(x_0, y_0)\}$ 上有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2},$$

因此 $\Delta f = 0$. □

再继续研究调和函数的性质之前, 首先做一些准备工作。

【引理 5.3】 设 D 是平面上由有限多条光滑曲线所围成的有界闭区域, u 和 v 是定义在 D 上的两个函数, 且 $u \in C^2(D)$, $v \in C^1(D)$, 则

$$\iint_D v \Delta u \, dx \, dy = - \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \, dy + \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial x} \, dy - v \frac{\partial u}{\partial y} \, dx.$$

证明. 在 (16.23) 中将 u 换成 v , 并取 $P = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial x}$ 便可得出结论. □

【推论 5.4】 在引理 5.3 的条件下我们有

(1)

$$\iint_D \Delta u \, dx \, dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial x} \, dy - \frac{\partial u}{\partial y} \, dx;$$

(2) 若进一步有 $v \in C^2(D)$, 则

$$\iint_D (v \Delta u - u \Delta v) \, dx \, dy = \int_{\partial D} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy - \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx.$$

证明. (1) 在引理 5.3 中取 $v = 1$ 即得, 当然也可直接由 Green 公式得到。

(2) 在引理 5.3 中交换 u, v 的位置, 并将所得结果与引理 5.3 中的结果相减即得. □

【定理 5.5】 设 D 是平面上由有限多条光滑曲线所围成的有界闭区域, $f, g \in C^2(D)$ 且均是 D 上的调和函数。如果对任意的 $\mathbf{a} \in \partial D$ 有 $f(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})$, 那么对任意的 $\mathbf{a} \in D$ 也有 $f(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})$ 。简而言之, 调和函数由其在边界上的值唯一确定。

证明. 记 $h = f - g$, 则 h 也是 D 上的调和函数, $h \in C^2(D)$ 且 h 在 ∂D 上取值恒为 0, 我们要证明 h 在 D 上取值均为 0。

在引理 5.3 中取 $u = v = h$ 可得

$$\iint_D h \Delta h \, dx \, dy = - \iint_D \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy + \int_{\partial D} h \frac{\partial h}{\partial x} \, dy - h \frac{\partial h}{\partial y} \, dx.$$

由 $\Delta h = 0$ 知上式左边积分等于 0, 由 h 在 ∂D 上为 0 知上式右边的第二型曲线积分等于 0, 因此

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

于是由偏导的连续性知在 D 上有 $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = 0$, 从而 h 在 D 上是常值函数 (参见 §13.2 习题 22)。又因为 h 在 ∂D 上取值为 0, 故而 h 在 D 上取值为 0。□

【定理 5.6】(均值定理) 设 f 是定义在区域 D 上的调和函数, $\mathbf{a} \in D$ 。现记 $d = \inf_{z \in \partial D} |z - \mathbf{a}|$, 那么对任意的 $r \in (0, d)$ 有

$$f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} f ds, \quad (16.27)$$

其中 C_r 表示以 \mathbf{a} 为圆心, 以 r 为半径的圆^⑦。

证明. 首先证明 (16.27) 右边与 r 无关。对任意的 $0 < r < R < d$, 我们用 E 表示由 C_r 和 C_R 所围成的环形闭区域。现记 $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$, 在 E 上使用推论 5.4 (2), 并取 $u = f$, $v = \log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, 那么由 u, v 均是 E 上的调和函数 (参见例 5.2) 知

$$\int_{\partial E} \left(v \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy - \left(v \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx = \iint_E (v \Delta f - f \Delta v) dx dy = 0,$$

也即

$$\begin{aligned} \int_{C_R} \left(v \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy - \left(v \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \\ = \int_{C_r} \left(v \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy - \left(v \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \end{aligned} \quad (16.28)$$

注意到在 C_R 上总有 $v = \log R$, 所以由推论 5.4 (1) 知

$$\int_{C_R} v \frac{\partial f}{\partial x} dy - v \frac{\partial f}{\partial y} dx = (\log R) \left(\int_{C_R} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx \right) = 0.$$

同理, 将上式中的 R 换成 r 可得到同样的结果, 从而 (16.28) 可被化简为

$$\int_{C_R} f \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx \right) = \int_{C_r} f \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx \right). \quad (16.29)$$

^⑦这一定理说明, 调和函数在圆心处的值等于它在圆周上的“平均值”。

现在来计算上式左边。利用极坐标变换

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \theta \\ y = y_0 + R \sin \theta \end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx \right) &= \int_{C_R} \frac{f \cdot ((x - x_0) dy - (y - y_0) dx)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \int_0^{2\pi} f d\theta \\ &= \frac{1}{R} \int_{C_R} f ds. \end{aligned}$$

同样有

$$\int_{C_r} f \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx \right) = \frac{1}{r} \int_{C_r} f ds.$$

因此 (16.29) 也即

$$\frac{1}{R} \int_{C_R} f ds = \frac{1}{r} \int_{C_r} f ds.$$

这就证明了 (16.27) 右边与 r 无关, 我们将其值记作 A , 那么令 $r \rightarrow 0^+$ 可得

$$\begin{aligned} A &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} f ds = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0^+} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta \\ &= f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

□

【定理 5.7】 设 D 是一个平面闭区域, f 是定义在 D 上的一个非常值的调和函数, 那么 f 在 D 的内部取不到其最大值和最小值。

证明. 因为 f 的最小值点必是 $-f$ 的最大值点, 所以只需证明 f 在 D 内部取不到最大值即可。现记 $M = \sup_{z \in D^\circ} f(z)$, 若 $M = +\infty$, 那么命题已然获证, 故不妨设 $M < +\infty$ 。

如果存在 $\mathbf{a} \in D^\circ$ 使得 $f(\mathbf{a}) = M$, 那么选取 $d > 0$ 使得 $B(\mathbf{a}, d) \subseteq D^\circ$, 则由定理 5.6 知对任意的 $r \in (0, d)$ 有

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} f ds = f(\mathbf{a}) = M,$$

其中 C_r 是以 \mathbf{a} 为圆心, 以 r 为半径的圆。于是

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} (M - f) ds = 0.$$

进而由 f 的连续性知对任意的 $z \in C_r$ 有 $f(z) = M$, 再由 r 的任意性知

$$f(z) = M, \quad \forall z \in B(\mathbf{a}, d).$$

这说明集合 $D_1 = \{z \in D^\circ : f(z) = M\}$ 是开集。此外, 由 f 的连续性知 $D_2 = \{z \in D^\circ : f(z) < M\}$ 也是开集。注意到 $D_1 \cup D_2 = D^\circ$ 且 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, 故由 D° 的连通性知 $D_1 = \emptyset$ 或 $D_2 = \emptyset$ 。如果 $D_2 = \emptyset$, 那么 $D_1 = D^\circ$, 于是 f 是 D° 上的常值函数, 再由 f 的连续性知 f 是 D 上的常值函数, 这与假设矛盾。故而 $D_1 = \emptyset$, 至此定理得证。 \square

习题 16.5

1. 证明 $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ 是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ 上的调和函数。
2. 求定义在 \mathbb{R} 上的所有二阶连续可导函数 f , 使得 $f(x+y)$ 是 \mathbb{R}^2 上的调和函数。
3. 求定义在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的所有二阶连续可导函数 f , 使得 $f(x^2 + y^2)$ 是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上的调和函数。
4. 证明在极坐标变换

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

下有

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

5. (Laplace 算子在正交变换下的不变性) 设 f 是调和函数, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一个正交矩阵, $g(x, y) = f(ax + by, cx + dy)$ 。证明 $\Delta f = \Delta g$ 。
6. (Laplace 方程在反演变换下的不变性) 设 f 是调和函数, 证明函数 $g(x, y) = f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ 满足

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

7. 设 D 是平面上由有限多条光滑曲线所围成的有界区域, $u \in C^2(D)$, 且对 D 中任意一条分段光滑闭曲线 C 均有

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = 0.$$

证明 u 是 D 上的调和函数。

曲面积分

在继续了解物体表面上的电流密度与这些表面内外的势函数的相应值之间的关系之前，我们要建立一个今后对我们来说非常有用的一般性定理。该定理可以这样来阐述……

—— G. Green

§ 17.1

曲面的面积

本节的目的是对一些特殊曲面给出其面积的定义。

回忆起在讨论曲线弧长时我们采用了内接折线的方式来逼近曲线，因此一个自然的想法是利用内接多面体来逼近曲面，进而通过计算多面体的表面积以及极限过程得到曲面的面积，但事实上这是不可行的。H. A. Schwarz 曾对圆柱面作出了一个反例，其基本思想是：哪怕内接多面体的每个面的直径均充分小，它的每个面也未必是非常贴近曲面的，这些面甚至有可能在局部与曲面的切平面几乎垂直。按照这一思想，为了计算曲面面积，我们应当在局部选取与曲面非常贴近的平面来作为参考，当在曲面的每个点处均存在切平面时，选择切平面作为参考自然是最优的了。然而，对于许多常见的曲面而言，并非在其每个点处均有切平面（例如正方体表面及锥面，它们在顶点处均不存在切平面），这促使我们把研究重点放在“几乎处处”有切平面的曲面上。

【定义 1.1】 设 Ω 是 \mathbb{R}^2 中的一个区域， $D \subseteq \Omega$ ，且 D 是由分段光滑曲线所围成的有界闭区域。如果存在 Ω 上的映射

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega \quad (17.1)$$

满足

(1) $\mathbf{r} \in C^1(\Omega)$;

(2) \mathbf{r} 在 D° 上是双射, 并且对任意的 $(u, v) \in D^\circ$ 有 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$, 其中 \times 为向量积且

$$\mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

则称 $\mathbf{r}(D)$ 为 \mathbb{R}^3 中的一个光滑曲面。

如果 $S \subseteq \mathbb{R}^3$ 由有限多个光滑曲面拼接而成, 则称之为分片光滑曲面。

下面我们来看看如何定义光滑曲面的面积。设 Ω, D, \mathbf{r} 如定义 1.1 中所给出, 并记 $S = \mathbf{r}(D)$ 。对于一个包含于 D 内的小矩形

$$Q = [u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v],$$

映射 \mathbf{r} 将其映为 S 上的一个图形 Q' , 那么由带 Peano 余项的 Taylor 公式知

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \cdot \Delta u + o(\Delta u),$$

$$\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) = \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \cdot \Delta v + o(\Delta v).$$

注意到 $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$, 因此 S 在点 $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ 处的切平面存在, 且它可以由 $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ 及 $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ 张成。于是 Q' 的面积应当近似等于该切平面上以 $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ 为顶点, 由向量 $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \cdot \Delta u$ 和 $\mathbf{r}_v(u_0, v_0) \cdot \Delta v$ 所张成的平行四边形的面积, 而这一面积为

$$|(\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \cdot \Delta u) \times (\mathbf{r}_v(u_0, v_0) \cdot \Delta v)| = |\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)| \cdot \Delta u \Delta v.$$

现在在 uv 平面内用平行于坐标轴的直线将该平面划分成两两无公共内点的直径小于 δ 的矩形, 并将这些矩形中位于 D 内者取出, 再用上述方法计算它们在映射 \mathbf{r} 下的图形面积的近似值, 把这些近似值相加即得

$$\sum_i |\mathbf{r}_u(\xi_i) \times \mathbf{r}_v(\xi_i)| \cdot \Delta u_i \Delta v_i.$$

那么当 $\delta \rightarrow 0$ 时上述和式的极限值就应当是曲面 S 的面积。考虑到上面和式的极限正是集合 D 上的二重积分, 所以我们给出如下定义。

【定义 1.2】 设 Ω, D, \mathbf{r} 如定义 1.1 中所给出, $S = \mathbf{r}(D)$ 是由参数方程 (17.1) 所定义的光滑曲面, 那么 S 的面积

$$\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv. \quad (17.2)$$

如果 S 是由光滑曲面 S_1, \dots, S_n 拼接而成的分片光滑曲面, 且这些光滑曲面至多在曲面边界处有交点, 那么我们就把 S 的面积定义为诸 S_i 的面积之和。

现在我们来把 (17.2) 中的被积函数用函数 x, y, z 的偏导表示出来。为方便起见, 分别将 $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ 记作 x_u, y_u, z_u , 同时分别将 $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ 记作 x_v, y_v, z_v 。如果用 $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ 表示 \mathbf{r}_u 与 \mathbf{r}_v 之间的夹角, 那么

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 &= |\mathbf{r}_u|^2 \cdot |\mathbf{r}_v|^2 \sin^2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \\ &= |\mathbf{r}_u|^2 \cdot |\mathbf{r}_v|^2 (1 - \cos^2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)) \\ &= |\mathbf{r}_u|^2 \cdot |\mathbf{r}_v|^2 - \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle^2. \end{aligned}$$

故若记

$$\begin{cases} E = |\mathbf{r}_u|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G = |\mathbf{r}_v|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \end{cases} \quad (17.3)$$

那么 $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$, 相应地 (17.2) 变为

$$\iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \quad (17.4)$$

我们称 E, F, G 为 Gauss 系数或曲面的第一基本量。

特别地, 如果光滑曲面由显式方程 $z = \varphi(x, y)$ 给出, 其中参数域为 D 并且 $\varphi \in C^1(D)$, 那么在上面的讨论中取 $u = x, v = y$ 可得

$$E = 1 + \varphi_x^2, \quad F = \varphi_x \varphi_y, \quad G = 1 + \varphi_y^2,$$

于是 $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}$, 从而 S 的面积为

$$\iint_D \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} \, dx \, dy \quad (17.5)$$

【例 1.3】 设 $a > 0$, 计算以 a 为半径的球面 $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ 的面积。

解. S 的参数表示为

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta, \\ y = a \sin \varphi \sin \theta, \\ z = a \cos \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]$$

若将映射 $(\varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ 记作 \mathbf{r} , 那么

$$\mathbf{r}_\varphi = (a \cos \varphi \cos \theta, a \cos \varphi \sin \theta, -a \sin \varphi), \quad \mathbf{r}_\theta = (-a \sin \varphi \sin \theta, a \sin \varphi \cos \theta, 0),$$

因此

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = a^2 \sin^2 \varphi,$$

从而可得 S 的面积为

$$\iint_{\varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]} \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta = \iint_{\varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]} a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 4\pi a^2.$$

□

【例 1.4】(旋转曲面的面积) 设 f 是定义在区间 $[a, b]$ 上的非负连续可微函数, 试计算由平面上的曲线 $y = f(x)$ 绕 x 轴旋转所得的旋转曲面 S 的面积.

解. 在已有的 Oxy 平面的基础上通过右手法则确定 z 轴的方向, 下面我们在这一坐标系中给出 S 的参数方程. 由于 S 是旋转曲面, 所以用过点 $(x, 0, 0)$ 且垂直于 x 轴的平面去截 S 总可以得到一个圆, 这个圆的半径为 $f(x)$. 因此可得 $S = \mathbf{r}(D)$, 其中 $D = [a, b] \times [0, 2\pi]$,

$$\mathbf{r}(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta).$$

相应地有

$$\mathbf{r}_x = (1, f'(x) \cos \theta, f'(x) \sin \theta), \quad \mathbf{r}_\theta = (0, -f(x) \sin \theta, f(x) \cos \theta).$$

于是

$$E = 1 + [f'(x)]^2, \quad F = 0, \quad G = f(x)^2,$$

进而可得 S 的面积为

$$\begin{aligned} \iint_{x \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi]} \sqrt{EG - F^2} dx d\theta &= \iint_{x \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi]} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx d\theta \\ &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \end{aligned}$$

□

【例 1.5】 设 $0 < \rho < R$, 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 位于柱面 $x^2 + y^2 = \rho^2$ 内部的那一部分曲面的面积。

解. 所考虑的曲面由对称的两部分组成, 我们考虑第三坐标大于 0 的那一部分, 其方程为 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 其中 x, y 满足 $x^2 + y^2 \leq \rho^2$ 。由于

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

所以

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

进而由 (17.5) 知所求曲面面积为

$$\begin{aligned} 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq \rho^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy &= 2R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\rho \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \\ &= 4\pi R (R - \sqrt{R^2 - \rho^2}). \end{aligned}$$

□

习题 17.1

1. 计算下列曲面的面积:

(1) 马鞍面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) 所截的部分;

(2) 椭圆抛物面 $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ 被柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$ ($a, b, c > 0$) 所截的部分;

(3) 螺旋面 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = b\theta$ ($0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$), 其中 $b > 0$;

(4) 曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2xy$ ($a > 0$)。

2. 设 Ω, D, \mathbf{r} 如定义 1.1 中所给出, $S = \mathbf{r}(D)$ 是光滑曲面。又设 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是正交变换。证明 $|(L \circ \mathbf{r})_u \times (L \circ \mathbf{r})_v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$, 进而得出光滑曲面的面积在正交变换下保持不变。

3. 计算由下列曲线段绕 x 轴旋转所得的旋转曲面的面积:

(1) $y = \frac{1}{3}x^3$ ($0 \leq x \leq 2$);

(2) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($0 < a < b$);

(3) 摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), 其中 $a > 0$ 。

4. 求星形线 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($a > 0$) 绕直线 $y = x$ 旋转后所得曲面的面积。

§ 17.2

第一型曲面积分

类似于第一型曲线积分, 我们给出第一型曲面积分的定义。

【定义 2.1】 设 S 是 \mathbb{R}^3 中的一个光滑曲面, f 是定义在 S 上的一个函数。对 S 作分划

$$S = \bigcup_{i=1}^n S_i,$$

其中每个 S_i 均是光滑曲面, 且这些光滑曲面至多在曲面边界处有交点。如果存在实数 I , 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $\max_{1 \leq i \leq n} \text{diam } S_i < \delta$, 就对任意的 $\xi_i \in S_i$ 有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sigma(S_i) - I \right| < \varepsilon,$$

其中 $\sigma(S_i)$ 表示 S_i 的面积, 则称 I 为 f 在 S 上的 第一型曲面积分 (surface integral of the first kind), 记作

$$I = \iint_S f(x, y, z) \, dS.$$

如果 S 是由光滑曲面 S_1, \dots, S_m 组成的分片光滑曲面, 且这些光滑曲面至多在曲面边界处有交点, 那么当 f 在每个 S_i 上的第一型曲面积分都存在时, 定义

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \sum_{i=1}^m \iint_{S_i} f(x, y, z) \, dS.$$

现设光滑曲面 S 由参数方程

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

给出, 其中参数区域为 D 且 $\mathbf{r} \in C^1(D)$ 。又设 f 是定义在 S 上的一个连续函数, 那么与 §16.1 中的讨论类似, 利用光滑曲面的面积公式 (17.4) 可得

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) \, dS &= \iint_D (f \circ \mathbf{r})(u, v) \cdot |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv, \end{aligned} \tag{17.6}$$

其中 Gauss 系数 E, F, G 如 (17.3) 所定义。特别地, 当 S 由显式方程

$$z = \varphi(x, y)$$

所给出时, 我们有

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} \, dx \, dy.$$

【例 2.2】 设 $a > 0$, S 是半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 计算 $\iint_S (x + y + z) \, dS$ 。

解. 与例 1.5 类似, 我们有

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_S (x + y + z) \, dS &= \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy \\ &= \int_0^a dr \int_0^{2\pi} (r \cos \theta + r \sin \theta + \sqrt{a^2 - r^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= \pi a^3. \end{aligned}$$

□

【例 2.3】 计算 $\iint_S z \, dS$, 其中 S 是由参数方程

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = \theta, \end{cases} \quad \rho \in [0, a], \theta \in [0, 2\pi]$$

所确定的螺旋面的一部分。

解. 我们有

$$E = x_\rho^2 + y_\rho^2 + z_\rho^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

$$F = x_\rho x_\theta + y_\rho y_\theta + z_\rho z_\theta = (\cos \theta)(-\rho \sin \theta) + (\sin \theta)(\rho \cos \theta) = 0,$$

$$G = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = (-\rho \sin \theta)^2 + (\rho \cos \theta)^2 + 1 = \rho^2 + 1,$$

故而

$$\begin{aligned} \iint_S z \, dS &= \iint_{\rho \in [0, a], \theta \in [0, 2\pi]} \theta \cdot \sqrt{\rho^2 + 1} \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \theta \, d\theta \int_0^a \sqrt{\rho^2 + 1} \, d\rho \\ &= 2\pi^2 \left(\frac{\rho}{2} \sqrt{\rho^2 + 1} + \frac{1}{2} \log(\rho + \sqrt{\rho^2 + 1}) \right) \Big|_0^a \\ &= \pi^2 a \sqrt{a^2 + 1} + \pi^2 \log(a + \sqrt{a^2 + 1}). \end{aligned}$$

□

习题 17.2

1. 计算下列第一型曲面积分:

(1) $\iint_S \frac{1}{z} \, dS$, 其中 S 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 满足 $z \geq h$ ($0 < h < a$) 的部分;

(2) $\iint_S (x+y+z) \, dS$, 其中 S 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱 $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$) 所截的部分;

(3) $\iint_S \frac{1}{(1+x+y)^2} \, dS$, 其中 S 是四面体 $x+y+z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 的边界;

(4) $\iint_S z^2 \, dS$, 其中 S 是圆锥表面的一部分 $x = r \cos \theta \sin \alpha$, $y = r \sin \theta \sin \alpha$, $z = r \cos \alpha$ ($0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$), $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 是一个常数.

2. 计算

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z) \, dS,$$

其中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{若 } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & \text{若 } z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

3. 设 Ω, D, \mathbf{r} 如定义 1.1 中所给出, $S = \mathbf{r}(D)$ 是光滑曲面, f 是定义在 S 上的一个函数. 又设 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是正交变换. 证明

$$\iint_{L(S)} f \, dS = \iint_S f \circ L \, dS.$$

4. 设 $f \in C(\mathbb{R})$, S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 证明 Poisson 公式

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du.$$

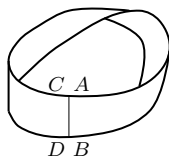
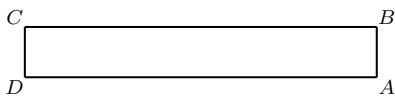
§ 17.3

曲面的侧与定向

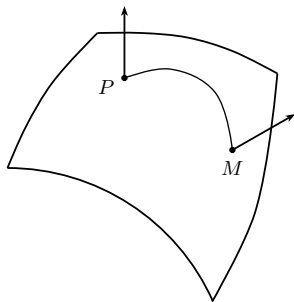
我们平时所接触的曲面大多均可分出其两侧, 例如空间中平行于 Oxy 平面的平面具有上侧和下侧, 球面有内侧和外侧等等。简单来说, 如果我们要用一种颜色来对这些曲面进行染色, 那么在不越过边界的情况下是无法将曲面涂遍的。

【定义 3.1】 设 S 是一个光滑曲面, 对于任意的 $P \in S$ 以及 S 上的任一过点 P 的闭曲线 C , 当我们选定了 P 的一个法向量, 并让动点从 P 出发沿 C 运动, 那么在这一运动过程中法向量的方向连续变动。如果当动点回到 P 时法向量的方向与出发时一致, 则称 S 为 双侧曲面 (two-sided surface)。否则称 S 为 单侧曲面 (one-sided surface)。

单侧曲面确实是存在的, 一个著名的例子就是 Möbius 带 (Möbius strip), 它可由下述方式得到。将如下图所示的长方形 $ABCD$ 扭转一次, 再将 A, C 粘合, 将 B, D 粘合, 那么所得到的曲面就是 Möbius 带。



设 S 是一个双侧曲面, 在 S 上取一点 P 。如果指定了 P 处的法向量的方向, 那么 S 上每个点处的法向量的方向也随之确定。事实上, 对于 S 上任意一点 M , 我们用 S 上的一条曲线连接 P 与 M , 并让动点从 P 运动到 M , 此时法向量的方向也连续变动, 从而当动点运动至 M 时就赋予了点 M 一个法向量。需要指出的是, 用上述方式所确定的 M 的法向量方向与连接 P 与 M 的道路无关。这是因为如果 C_1 与 C_2 是 S 上的两条连接 P 与 M 的曲线段, 且动



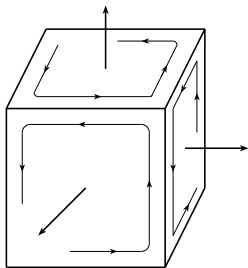
点沿这两个曲线段从 P 到 M 时会在 M 点得到两个方向相反的法向量, 那么让动点从 P 沿 C_1 到 M 再沿 C_2 回到 P 时在 P 点的法向量方向应当与出发时相反, 这与双侧曲面的定义矛盾。

当 S 是双侧曲面时, S 上的全部点的集合连同按上述规则所指定的每点处的法向量方向被称作曲面 S 的一个定侧。

现设双侧曲面 S 的边界是由有限多条分段光滑闭曲线组成, 那么当我们指定了 S 的一个定侧后, 便可按下述方式指定边界的正向: 当一个人沿法向量方向站立并沿边界行走时, S 总位于左手边。我们把 S 连同上面对边界指定的正向称作 S 的一个定向。因此, 对于双侧曲面而言, 选定了曲面的侧就确定了曲面的定向; 反之, 选定了曲面边界的方向也就唯一地决定了曲面的侧。

下面来讨论分片光滑曲面的情况。假设 S 是由双侧的光滑曲面 S_1, \dots, S_n 所构成的分片光滑曲面, 那么每个 S_i 都有两个定向可供选择。如果存在某种选择方式, 使得对于有公共边界的任意两个光滑曲面, 它们在公共边界上的方向恰好相反, 那么就称 S 是双侧的。值得一提的是, Möbius 带虽然可由两个双侧曲面拼接而成, 但它不是双侧曲面。

当 S 是一个双侧的分片光滑曲面时, S 的一个定侧 (相应地, 定向) 是指 S_i ($1 \leq i \leq n$) 的定侧 (相应地, 定向) 的总和, 这些定侧使得任意两个有公共边界的光滑曲面在公共边界上的方向相反。右图中给出了正方体表面的一个定侧。



现假设选定了 S 的一个定侧。如果在某个光滑曲面上将边界的方向改为相反的方向, 那么按照上述规定, 其余所有的光滑曲面的边界方向都必须作出改变, 改变后的 S 的定侧确定了 S 的第二侧。

§ 17.4

第二型曲面积分

【定义 4.1】 设 S 是一个双侧曲面, 取定其一侧, 并用 $\mathbf{n}(x, y, z)$ 表示曲面在点 (x, y, z) 处的单位法向量, 又设 $f = (P, Q, R)^T$ 是定义在 S 上的一个映射, 如果第一型曲面积分

$$\iint_S \langle f, \mathbf{n} \rangle dS$$

存在 (其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示向量的内积), 那么就把它值称为 f 在 S 上沿所指定的侧的第二型曲面积分 (surface integral of the second kind), 记作

$$\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy.$$

若记 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)^T$, 那么按照定义有

$$\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS, \quad (17.7)$$

上式左、右两边分别是第二型和第一型曲面积分。

【注 4.2】 (1) 由定义知, 对于同一个双侧曲面 S 及同一个映射 f 而言, 沿不同的侧的第二型曲面积分具有相反的符号。

(2) 虽然第二型曲面积分是通过第一型曲面积分来定义的, 但前者要求曲面是双侧的, 而后者的原始定义中没有这一要求。

如果 S 是由双侧曲面 S_1, \dots, S_n 组成的双侧分片光滑曲面, 并且这些双侧曲面至多在曲面边界处有交点, 那么当我们指定了 S 的一侧, 就意味着对每个 S_i ($1 \leq i \leq n$) 指定了侧, 此时, 如果 $f = (P, Q, R)^T$ 在每个 S_i 上的第二型曲面积分均存在, 则定义 f 在 S 上沿指定的侧的第二型曲面积分为

$$\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy.$$

下面来讨论第二型曲面积分的计算问题。设双侧曲面 S 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D$$

给出。为方便起见, 我们记 $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$, 于是

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}, \quad (17.8)$$

其中选取正号或负号依赖于曲面的定侧。利用 (17.6) 可得

$$\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iint_S \langle f, \mathbf{n} \rangle \, dS = \pm \iint_S \frac{\langle f, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \rangle}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \, dS$$

$$= \pm \iint_D \langle f \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \rangle du dv,$$

其中混合积

$$\begin{aligned} \langle f \circ \mathbf{r}, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \rangle &= \begin{vmatrix} P \circ \mathbf{r} & Q \circ \mathbf{r} & R \circ \mathbf{r} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \\ &= (P \circ \mathbf{r}) \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + (Q \circ \mathbf{r}) \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + (R \circ \mathbf{r}) \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \end{aligned}$$

故而

$$\begin{aligned} \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \pm \iint_D \left(P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right. \\ &\quad + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \\ &\quad \left. + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right) du dv. \end{aligned} \quad (17.9)$$

特别地, 如果 S 由显式方程

$$z = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in D$$

给出, 那么

$$\begin{aligned} \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \pm \iint_D \left(-P(x, y, \varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - Q(x, y, \varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + R(x, y, \varphi(x, y)) \right) dx dy. \end{aligned} \quad (17.10)$$

我们略微过多地说明一下上式中符号的选择问题, 为方便起见, 记 $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, 那么由 (17.8) 知

$$\mathbf{n} = \pm \frac{(-p, -q, 1)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}.$$

如果选择正号, 那么 \boldsymbol{n} 的第三分量为正, 这意味着所选取的法向量与 z 轴正向的夹角为锐角, 从而此时曲面的定侧为上侧; 相应地, 如果在上式中选择负号, 那么曲面的定侧为下侧。所以针对于曲面的定侧为上侧或下侧, 我们在 (17.10) 中相应地选取正号或负号。

【例 4.3】 设 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x, y, z \geq 0\}$, S 的定侧由法向量 $(1, 1, 1)^T$ 给出。计算

$$I = \iint_S (x+1) dy dz + y dz dx + dx dy.$$

解. 因为曲面方程为 $z = 1 - x - y$, 且法向量方向与 z 轴正向夹角为锐角, 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\substack{x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} (-(x+1) \cdot (-1) - y \cdot (-1) + 1) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y+2) dy = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2} \right) dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

□

【例 4.4】 设 S 是球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ ($R > 0$), 定侧为外侧, 计算

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy.$$

解. 先计算 $\iint_S z^2 dx dy$ 。用 S_1 表示上半球面, 定侧为上侧; 用 S_2 表示下半球面, 定侧为下侧。那么

$$\iint_S z^2 dx dy = \iint_{S_1} z^2 dx dy + \iint_{S_2} z^2 dx dy.$$

我们有 $z-c = \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$, 其中在 S_1 上取正号, 在 S_2 上取负号。由于 $z^2 = (z-c)^2 + c^2 + 2c(z-c)$, 故而上式右边也即

$$\iint_{S_1} [(z-c)^2 + c^2 + 2c(z-c)] dx dy + \iint_{S_2} [(z-c)^2 + c^2 + 2c(z-c)] dx dy.$$

其中

$$\iint_{S_1} (z-c)^2 dx dy + \iint_{S_2} (z-c)^2 dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2 \leq R^2} [R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2] dx dy \\
&\quad + \left(- \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2 \leq R^2} [R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2] dx dy \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

同理 $\iint_{S_1} c^2 dx dy + \iint_{S_2} c^2 dx dy = 0$, 因此

$$\begin{aligned}
\iint_S z^2 dx dy &= 2c \iint_{S_1} (z-c) dx dy + 2c \iint_{S_2} (z-c) dx dy \\
&= 4c \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dx dy \\
&= 4c \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r dr = \frac{8\pi}{3} cR^3.
\end{aligned}$$

类似可得

$$\iint_S x^2 dy dz = \frac{8\pi}{3} aR^3, \quad \iint_S y^2 dz dx = \frac{8\pi}{3} bR^3,$$

所以 $I = \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c)$. □

【例 4.5】 设 S 为由 $x^2 + y^2 = z^2$ 和 $z = h$ ($h > 0$) 所围成的圆锥的表面, 定侧为外侧, 计算

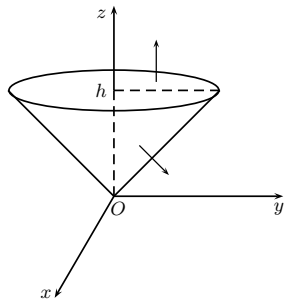
$$I = \iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy.$$

解. 用 S_1 表示圆锥底面, 定侧为上侧; 用 S_2 表示圆锥侧面, 定侧为下侧。并用 I_1, I_2 分别表示沿 S_1 和 S_2 的积分, 则 $I = I_1 + I_2$ 。我们有

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (x-y) dx dy = 0.$$

S_2 的方程为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 其中 $x^2 + y^2 \leq h^2$, 因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{z},$$



故而

$$\begin{aligned} I_2 &= - \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} \left(-(y-z) \cdot \frac{x}{z} - (z-x) \cdot \frac{y}{z} + (x-y) \right) dx dy \\ &= -2 \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (x-y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

综上所述可得 $I = 0$ 。 □

习题 17.4

1. 计算下列第二型曲面积分:

(1) $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$),
定侧为外侧;

(2) $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 S 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 3$,
定侧沿柱体外侧;

(3) $\iint_S \frac{1}{x} dy dz + \frac{1}{y} dz dx + \frac{1}{z} dx dy$, 其中 S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
($a, b, c > 0$), 定侧为外侧;

(4) $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 S 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq h$), 定侧为下侧;

(5) $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 S 是抛物面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq h$), 定侧为下侧;

(6) $\iint_S yz dy dz + zx dz dx + xy dx dy$, 其中 S 是八分之一球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 定侧为上侧。

§ 17.5

Gauss 公式

在研究曲线积分时, 我们建立了沿闭曲线的第二型曲线积分与曲线所围区域上的二重积分之间的联系, 也即所谓的 Green 公式。对于曲面积分也有类似结果, 这就是本节要介绍的 Gauss 公式。我们先从讨论一些简单情形开始。

设 D 是 \mathbb{R}^2 中的一个有界闭区域, 边界是一条分段光滑闭曲线,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), (x, y) \in D\}, \quad (17.11)$$

其中在参数区域 D 上由 $z = \varphi(x, y)$ 和 $z = \psi(x, y)$ 所确定的曲面均为光滑曲面. 又设函数 $R \in C^1(V)$, 我们来计算第二型曲面积分

$$\iint_{\partial V} R \, dx \, dy,$$

在这里曲面 ∂V 的定侧为外侧. 若记

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \psi(x, y), (x, y) \in D\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \phi(x, y), (x, y) \in D\},$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), (x, y) \in \partial D\},$$

那么 $\partial V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. 由 ∂V 的定侧知, S_1 的定侧为上侧; S_2 的定侧为下侧; S_3 的定侧为法向量方向朝着立体外. 于是

$$\iint_{\partial V} R \, dx \, dy = \sum_{i=1}^3 \iint_{S_i} R \, dx \, dy.$$

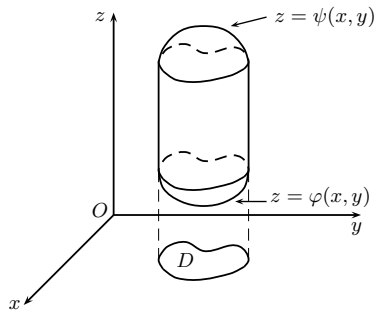
注意到 S_3 的法向量与 z 轴垂直, 也即是说法向量中第三分量为 0, 故由 (17.7) 知

$$\iint_{S_3} R \, dx \, dy = 0.$$

再对沿 S_1 和 S_2 的积分应用 (17.10) 可得

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} R \, dx \, dy &= \iint_{S_1} R \, dx \, dy + \iint_{S_2} R \, dx \, dy \\ &= \iint_D R(x, y, \psi(x, y)) \, dx \, dy - \iint_D R(x, y, \varphi(x, y)) \, dx \, dy \\ &= \iint_D dx \, dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) \, dz = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz, \end{aligned}$$

上面最后一步用到了 Fubini 定理.



类似地, 如果

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(y, z) \leq x \leq \psi(y, z), (y, z) \in D\}, \quad (17.12)$$

并且 $P \in C^1(V)$, 那么

$$\iint_{\partial V} P \, dy \, dz = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} \, dx \, dy \, dz.$$

同样地, 如果

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, z) \leq y \leq \psi(x, z), (x, z) \in D\}, \quad (17.13)$$

并且 $Q \in C^1(V)$, 那么

$$\iint_{\partial V} Q \, dz \, dx = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx \, dy \, dz.$$

更一般地, 如果 V 既能写成有限多个形如 (17.11) 的区域的并, 也能写成有限多个形如 (17.12) 的区域的并, 还能写成有限多个形如 (17.13) 的区域的并, 那么类似于 Green 公式的讨论可得

$$\iint_{\partial V} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dx \, dy \, dz,$$

这里 ∂V 的定侧为外侧。考虑到许多闭区域均满足以上条件, 我们不加证明地给出下述结论。

【定理 5.1】(Gauss 公式^①) 设 V 是 \mathbb{R}^3 中的一个有界闭区域, ∂V 由有限多个双侧的分片光滑曲面组成, 定侧为外侧。又设 $P, Q, R \in C^1(V)$, 则

$$\iint_{\partial V} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dx \, dy \, dz.$$

若令 $f = (P, Q, R)^T$, 那么通常记

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

并称之为映射 f 的散度 (divergence), 因此 Gauss 公式也被称作散度定理。

^① 也被称作 Остроградский 公式。

【例 5.2】 我们回到上节例 4.4, 在那里需要对球面

$$S: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (R > 0)$$

计算第二型曲面积分

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

这里 S 的定侧为外侧。利用 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned} I &= 2 \iiint_{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leq R^2} (x+y+z) dx dy dz \\ &= 2 \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} [(x+a) + (y+b) + (z+c)] dx dy dz \\ &= 2 \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (x+y+z) dx dy dz + \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c). \end{aligned}$$

由对称性知

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} x dx dy dz = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} y dx dy dz = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} z dx dy dz = 0.$$

于是 $I = \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c)$ 。

【例 5.3】 设 S 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 2$), S 的定侧为下侧, 计算第二型曲面积分

$$I = \iint_S 2xz dy dz + (y + \cos x) dz dx - z^2 dx dy.$$

解. 记 $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, z = 2\}$, 定侧为上侧, 并用 V 表示由 S 和 S_1 所围成的区域, 那么由 Gauss 公式知

$$\iint_{S \cup S_1} 2xz dy dz + (y + \cos x) dz dx - z^2 dx dy = \iiint_V dx dy dz = \int_0^2 \pi z dz = 2\pi.$$

因此

$$I = 2\pi - \left(\iint_{S_1} 2xz dy dz + (y + \cos x) dz dx - z^2 dx dy \right)$$

$$= 2\pi + 4 \iint_{x^2+y^2 \leq 2} dx dy = 2\pi + 8\pi = 10\pi.$$

□

习题 17.5

1. 利用 Gauss 公式计算下列第二型曲面积分:

(1) $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 S 是立方体 $[0, a]^3$ 的边界, 定侧为外侧;

(2) $\iint_S (x+y) dy dz + (y+z) dz dx + (z+x) dx dy$, 其中 S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a, b, c > 0$), 定侧为外侧;

(3) $\iint_S xy dy dz + (y+z) dz dx + (z^2+x) dx dy$, 其中 S 是四面体

$$x+y+z \leq a \quad (a > 0), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

的边界, 定侧为外侧;

(4) $\iint_S (x-y+z) dy dz + (y-z+x) dz dx + (z-x+y) dx dy$, 其中 S 是立体 $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| \leq 1$ 的边界, 定侧为外侧。

2. 设 V 是 \mathbb{R}^3 中的一个有界闭区域, ∂V 由有限多个双侧的分片光滑曲面组成, 定侧为外侧。又设 $P, Q, R, u \in C^1(V)$ 。证明三重积分的分部积分公式

$$\begin{aligned} \iiint_V u \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \iint_{\partial V} u \cdot (P dy dz + Q dz dx + R dx dy) \\ &\quad - \iiint_V \left(P \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + R \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

3. 设 $a, b, c > 0$, 计算

$$\iint_S \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 定侧为外侧。

4. 设 V 是 \mathbb{R}^3 中的一个区域, 证明:

(1) 若 $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ 与 $g: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ 均是 C^1 类的, 则对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 有

$$\operatorname{div}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{div} f + \beta \operatorname{div} g;$$

(2) 若 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ 与 $g: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ 均是 C^1 类的, 则

$$\operatorname{div}(f \cdot g) = f \cdot \operatorname{div} g + \langle g, \operatorname{grad} f \rangle.$$

5. 设 f 二阶可导, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 在 $r \neq 0$ 时计算 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$, 并说明哪些 f 使得对任意的 $r \neq 0$ 有 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = 0$.

§ 17.6

Stokes 公式

§16.3 中所给出的 Green 公式讨论的是平面区域的情形, 我们希望对更一般的空间曲面得到类似结果, 也即是建立曲面上的曲面积分与沿该曲面边界的曲线积分之间的联系。

我们来讨论一个特殊情形。假设双侧的光滑曲面 S 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D \quad (17.14)$$

给出, 且 $x(u, v)$, $y(u, v)$ 和 $z(u, v)$ 均在 D 上二阶连续可导。为方便起见, 记

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

又假设 ∂D 是光滑曲线, 它可由参数方程

$$\begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

给出, 其中 $u(t)$ 和 $v(t)$ 均在 $[a, b]$ 上连续可微。再设函数 P, Q, R 均在包含 S 的某个开集上连续可微。

现选取 S 的一侧, 回忆起 S 的侧可通过 (17.8) 中的正负号来确定, 故不妨假设所选取的是使 (17.8) 中取正号的那一侧。由这一定侧可确定 ∂S 的定向 (参见 §17.3)。我们来计算第二型曲线积分

$$\int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz.$$

通过右手法则在 Ouv 平面的基础上建立三维空间 $Ouvw$, 那么 D 可被看作是位于这一空间的 Ouv 平面上的一个曲面, 在这一意义下 D 也有上侧和下侧. 因为已经选定了 S 的一侧并且由这一定侧已决定了 ∂S 的定向, 所以映射 \mathbf{r} 同时也赋予了 D 的定侧以及 ∂D 的定向, 当然, ∂D 的定向也是相对于 D 的定侧的正向. 为了简单起见, 我们只讨论 D 的定侧是上侧的情况, 由这一定侧所确定的 ∂D 的定向使得我们将 D 重新看作 \mathbb{R}^2 中的区域时, ∂D 的定向恰是沿该区域的正向, 这使得我们可以应用 Green 公式将沿 ∂D 的第二型曲线积分与 D 上的二重积分联系起来.

首先来计算

$$\int_{\partial S} P dx.$$

不妨假设之前参数方程的选取使得 t 从 a 到 b 变化时对应于 ∂S 的方向, 于是按照第二型曲线积分的计算公式可得

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} P dx &= \int_a^b P \cdot \frac{\partial x}{\partial t} dt = \int_a^b P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot v'(t) \right) dt \\ &= \int_{\partial D} P \cdot \frac{\partial x}{\partial u} du + P \cdot \frac{\partial x}{\partial v} dv, \end{aligned}$$

上式右边是沿平面区域 D 的边界的正向的第二型曲线积分, 所以由 Green 公式知

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} P dx &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(P \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] du dv \\ &= \iint_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + P \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + P \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right) \right] du dv \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right) du dv. \end{aligned}$$

我们可以利用复合函数偏导数公式来计算最后一个式子中的被积函数,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \\ &\quad - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \\ &= \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{D(z, x)}{D(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)}. \end{aligned}$$

因此

$$\int_{\partial S} P dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{D(z, x)}{D(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right) du dv.$$

再由第二型曲面积分的计算公式 (17.9) 便可最终得到

$$\int_{\partial S} P dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

类似地,

$$\int_{\partial S} Q dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz.$$

$$\int_{\partial S} R dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx.$$

把上面三个式子相加即得

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz \\ = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy., \end{aligned}$$

此即 Stokes 公式。现将这一公式不加证明地严格表述如下。

【定理 6.1】(Stokes 公式) 设 S 是 \mathbb{R}^3 中的一个双侧的光滑曲面, 它由参数方程 (17.14) 给出, 其中 $x, y, z \in C^2(D)$, 边界 ∂S 由有限多条分段光滑曲线组成。又假设存在开集 $G \supseteq S$ 使得 $P, Q, R \in C^1(G)$ 。现选定 S 的一侧, 并由此确定 ∂S 的方向, 则有

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz \\ = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

如果记 $f = (P, Q, R)^T$, 那么我们通常称

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)^T$$

为 f 的旋度 (rotation), 记作 $\text{rot } f$ 。

为了方便记忆, Stokes 公式也被写成如下形式,

$$\int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

如果用 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)^T$ 表示决定 S 定侧的单位法向量, 那么按照 (17.7) 上述公式还可被写成

$$\int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS.$$

【例 6.2】 计算第二型曲线积分

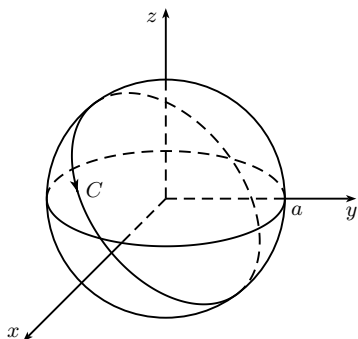
$$I = \int_C y dx + z dy + x dz,$$

其中 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 方向从 x 轴正方向看是逆时针方向。

解. 我们在第十六章例 2.6 中给出过 C 的参数方程, 因此可以直接通过参数方程来计算 I 的值, 但是利用 Stokes 公式会使整个计算过程更加简洁。

将平面 $x + y + z = 0$ 上由曲线 C 围成的部分记作 S , 那么 S 是一个以 a 为半径的圆, 按照 C 的定向, S 的单位法向量为 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, 因此由 Stokes 公式知

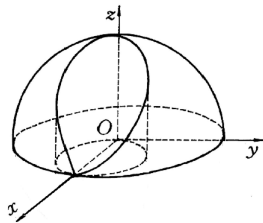
$$\begin{aligned} \int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz &= \iint_S \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\ &= -\sqrt{3} \iint_S dS = -\sqrt{3}\pi a^2. \end{aligned}$$



□

【例 6.3】 设 $a > 0$, 用 C 表示 Viviani 曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$



满足 $z \geq 0$ 的那部分, 方向从 x 轴正方向看是逆时针方向。试计算第二型曲线积分

$$I = \int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz.$$

解. 用 S 表示球面上被曲线 C 所围的那部分, 按照 C 的定向, 我们将 S 的定侧设置为沿球面外侧。曲面 S 具有显式表达 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 其中 $x^2 + y^2 \leq ax$, 为方便起见, 我们记 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq ax\}$ 。

由 Stokes 公式知

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = -2 \iint_S z dy dz + x dz dx + y dx dy,$$

再利用第二型曲面积分的计算公式 (17.10) 便得

$$\begin{aligned} I &= -2 \iint_D \left(-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} - x \cdot \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + y \right) dx dy \\ &= -2 \iint_D \left(x + y + \frac{xy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right) dx dy. \end{aligned}$$

注意到当把 y 换成 $-y$ 时积分区域 D 保持不变, 所以

$$\iint_D \left(y + \frac{xy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right) dx dy = 0,$$

进而有

$$I = -2 \iint_D x dx dy = -2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} + r \cos \theta \right) \cdot r dr = -\frac{\pi}{4} a^3.$$

□

习题 17.6

1. 利用 Stokes 公式计算下列第二型曲线积分:

(1) $\int_C (z - y) dx + (x - z) dy + (y - x) dz$, 其中 C 是以 $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$ 为顶点的三角形的边界 ($a > 0$), 方向从 $(a, 0, 0)$ 到 $(0, a, 0)$, 再到 $(0, 0, a)$, 最后回到 $(a, 0, 0)$;

(2) $\int_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (y^2 + x^2) dz$, 其中 C 是曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ ($0 < r < R$, $z > 0$), 方向从 z 轴正方向看是逆时针方向;

(3) $\int_C (z - y) dx + (x - z) dy + (y - x) dz$, 其中 C 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($x, y, z \geq 0$) 的边界, 方向为由所围曲面上侧部分所定的正向;

(4) $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, 其中 C 是平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 截立方体 $[0, a]^3$ 所得截面的边界, 方向从 x 轴正方向看是逆时针方向。

2. 设 V 是 \mathbb{R}^3 中的区域, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^3$ 与 $g: E \rightarrow \mathbb{R}^3$ 均连续可微, 证明:

(1) 对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 有 $\text{rot}(\alpha f + \beta g) = \alpha \text{rot} f + \beta \text{rot} g$;

(2) $\text{div}(f \times g) = \langle g, \text{rot} f \rangle - \langle f, \text{rot} g \rangle$ 。

3. 设 V 是 \mathbb{R}^3 中的区域, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 与 $g: E \rightarrow \mathbb{R}^3$ 均连续可微, 证明

$$\text{rot}(fg) = f \text{rot} g + \text{grad} f \times g.$$

Fourier 分析初步

几乎十五年过去了，在有关任意函数的解析表示的问题上没有取得任何实质性进展。这时 Fourier 的一篇注记给这个课题投入了新的曙光，在数学的这一部分的发展中，一个新的时代开始了，这就立即在数学物理中波澜壮阔的发展表现出来。

—— B. Riemann

本章的目的是对 Fourier 级数和 Fourier 变换作一个初步的介绍，我们立足于去阐述一些基本方法，因此所得到的结果远非最优的。

§ 18.1

Fourier 级数的定义

所谓三角级数 (trigonometric series)，是指形如

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{\ell} \right) \quad (18.1)$$

的关于变量 x 的函数项级数，其中 ℓ 是一个给定的正常数。三角级数理论的一个基本问题就是研究那些能用上面函数项级数表示的函数 $f(x)$ 。考虑到上式中的级数的通项是以 ℓ 为周期的函数，因此我们很自然地去假设 $f(x)$ 也是以 ℓ 为周期的，即

$$f(x + \ell) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

利用 Euler 公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

可将 (18.1) 的部分和写成如下形式:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[\frac{a_n}{2} \left(e^{\frac{2\pi nx}{\ell}i} + e^{-\frac{2\pi nx}{\ell}i} \right) + \frac{b_n}{2i} \left(e^{\frac{2\pi nx}{\ell}i} - e^{-\frac{2\pi nx}{\ell}i} \right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{2\pi nx}{\ell}i} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-\frac{2\pi nx}{\ell}i} \right). \end{aligned}$$

因此若记

$$\begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{2}, \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad \forall n \geq 1, \end{cases} \quad (18.2)$$

以及 $e(t) = e^{2\pi it}$, 那么 (18.1) 的部分和也即

$$\sum_{|n| \leq N} c_n e^{\frac{2\pi nx}{\ell}i} = \sum_{|n| \leq N} c_n e\left(\frac{nx}{\ell}\right),$$

从而 (18.1) 收敛当且仅当级数

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e\left(\frac{nx}{\ell}\right) \quad (18.3)$$

收敛。当然, 上式中的级数收敛是指极限

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e\left(\frac{nx}{\ell}\right)$$

存在。所以我们也相应地去研究哪些以 ℓ 为周期的函数 $f(x)$ 可写成 (18.3) 的形式。

首先来看一下如果 $f(x)$ 能用 (18.1) 或 (18.3) 表示, 那么 a_n , b_n 及 c_n 应该具有什么样的形式。通过简单计算可对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 得到

$$\int_0^\ell \cos \frac{2\pi nx}{\ell} \cos \frac{2\pi mx}{\ell} dx = \int_0^\ell \sin \frac{2\pi nx}{\ell} \sin \frac{2\pi mx}{\ell} dx = \begin{cases} \frac{\ell}{2}, & \text{若 } m = n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \\ 0, & \text{若 } m \neq n. \end{cases}$$

以及对任意的 $m, n \in \mathbb{Z}$ 有

$$\int_0^\ell \cos \frac{2\pi nx}{\ell} \sin \frac{2\pi mx}{\ell} dx = 0.$$

因此如果

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{\ell} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{\ell} \right),$$

那么在上式两边同时乘以 $\cos \frac{2\pi nx}{\ell}$, 并对 x 积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^\ell f(x) \cos \frac{2\pi nx}{\ell} dx &= \frac{a_0}{2} \int_0^\ell \cos \frac{2\pi nx}{\ell} dx \\ &+ \int_0^\ell \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{2\pi mx}{\ell} + b_m \sin \frac{2\pi mx}{\ell} \right) \cos \frac{2\pi nx}{\ell} dx. \end{aligned}$$

交换求和号与积分号 (我们暂时不去深究这一做法的严格性问题) 便得

$$\int_0^\ell f(x) \cos \frac{2\pi nx}{\ell} dx = \frac{\ell}{2} a_n,$$

也即

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos \frac{2\pi nx}{\ell} dx, \quad \forall n \geq 0. \quad (18.4)$$

同理可得

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin \frac{2\pi nx}{\ell} dx, \quad \forall n \geq 1. \quad (18.5)$$

类似地, 应用

$$\int_0^\ell e\left(\frac{nx}{\ell}\right) \cdot e\left(-\frac{mx}{\ell}\right) dx = \begin{cases} \ell, & \text{若 } m = n, \\ 0, & \text{若 } m \neq n \end{cases} \quad (18.6)$$

知, 如果

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e\left(\frac{nx}{\ell}\right),$$

那么应该有

$$c_n = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f(x) e\left(-\frac{nx}{\ell}\right) dx. \quad (18.7)$$

这里我们遇到了复值函数的积分, 它被定义为对实部和虚部分别积分, 也即是说, 如果 $g(x) = u(x) + iv(x)$, 其中 u 和 v 都是实值函数, 那么我们定义

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

略作运算可以验证复值函数的积分也满足实值函数积分的运算法则, 例如分部积分以及微积分学基本定理等。

尽管上面对系数 a_n , b_n 及 c_n 的推导并不严格, 但是却给了我们很好的启发并引出了下述定义。为了叙述的方便起见, 我们把在区间 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 或在 $[a, b]$ 上有有限多个奇点但是积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛的全体函数所成之集记作 $\mathcal{R}[a, b]$ 。

【定义 1.1】 设 ℓ 是一个正实数, $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的以 ℓ 为周期的函数, 并且 $f \in \mathcal{R}[0, \ell]$ 。我们把由 (18.4) 和 (18.5) 所定义的级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{\ell} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{\ell} \right)$$

以及由 (18.7) 所定义的级数

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e\left(\frac{nx}{\ell}\right)$$

均称作是 $f(x)$ 的 Fourier 级数 (Fourier series) 或 Fourier 展式 (Fourier expansion), 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{\ell} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{\ell} \right)$$

以及

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e\left(\frac{nx}{\ell}\right).$$

称 a_n , b_n 及 c_n 为 $f(x)$ 的 Fourier 系数 (Fourier coefficient)。通常将 c_n 记作 $\hat{f}(n)$ 。

注意到在上述定义中我们采用了记号“ \sim ”而没有用等号, 这是因为目前我们并不知道 $f(x)$ 的 Fourier 级数是否收敛于 $f(x)$ 。

因为 (18.4), (18.5) 和 (18.7) 中的被积函数均以 ℓ 为周期, 所以将积分区间换成任一长度为 ℓ 的区间所得的积分值均相同, 选取合适的区间进行积分会对 Fourier 系数的计算带来方便。我们来看几个例子。

【例 1.2】 设 $f(x)$ 是以 1 为周期的函数, 且

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

试求 $f(x)$ 的 Fourier 级数。

解. 因为 f 是偶函数, 所以

$$b_n = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \sin 2\pi nx \, dx = 0.$$

此外

$$a_0 = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \, dx = \frac{1}{6},$$

并且利用分部积分还可对 $n \neq 0$ 得到

$$a_n = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \cos 2\pi n x \, dx = \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}.$$

于是

$$f(x) \sim \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos 2\pi n x.$$

□

【例 1.3】 用 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分, 试求 $\psi(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$ 的 Fourier 级数。

解. $\psi(x)$ 是以 1 为周期的函数, 且当 $x \in [0, 1)$ 时有 $\psi(x) = x - \frac{1}{2}$, 因此

$$a_n = 2 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \cos(2\pi n x) \, dx = 0, \quad \forall n \geq 0,$$

$$b_n = 2 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \sin(2\pi n x) \, dx = -\frac{1}{\pi n}, \quad \forall n \geq 1,$$

于是有

$$\psi(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}.$$

□

【例 1.4】 设 $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且

$$f(x) = \cos \alpha x, \quad \forall x \in [-\pi, \pi).$$

试求 $f(x)$ 的 Fourier 级数。

解. 因为 $f(x)$ 是 $(-\pi, \pi)$ 上的偶函数, 故

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

此外,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(\alpha + n)x + \cos(\alpha - n)x) \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\alpha + n)\pi}{\alpha + n} + \frac{\sin(\alpha - n)\pi}{\alpha - n} \right) \\ &= \frac{2\alpha(-1)^n \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}. \end{aligned}$$

所以

$$f(x) \sim \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right).$$

□

如果 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \ell)$ 上的函数, 那么我们当然可以将其延拓为 \mathbb{R} 上的以 ℓ 为周期的函数。除此以外, 还有两种延拓方法也是颇为常用的, 它们分别是偶性延拓和奇性延拓。

【定义 1.5】 设 f 是定义在 $(0, \ell)$ 上的函数, 如果以 2ℓ 为周期的函数 g 满足

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \in (0, \ell), \\ f(-x), & \text{若 } x \in (-\ell, 0), \end{cases}$$

则称 g 为 f 的偶性延拓, 此时 g 是 $(-\ell, \ell) \setminus \{0\}$ 上的偶函数。若以 2ℓ 为周期的函数 h 满足

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \in (0, \ell), \\ -f(-x), & \text{若 } x \in (-\ell, 0), \end{cases}$$

则称 h 为 f 的奇性延拓, 此时 h 是 $(-\ell, \ell) \setminus \{0\}$ 上的奇函数。

为了方便起见, 我们通常将由 f 作偶性延拓或奇性延拓后所得的函数仍记作 f 。

设 f 是定义在 $(0, \ell)$ 上的函数。如果对 f 作偶性延拓, 那么它的 Fourier 级数中只含余弦项, 此时我们称这一 Fourier 级数为 $f(x)$ 的余弦级数, 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell},$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx. \quad (18.8)$$

如果对 f 作奇性延拓, 那么它的 Fourier 级数中只含正弦项, 此时我们称这一 Fourier 级数为 $f(x)$ 的正弦级数, 记作

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell},$$

其中

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx. \quad (18.9)$$

【例 1.6】 试求定义在 $(0, \pi)$ 上的函数 $f(x) = x$ 的余弦级数。

解. 按照公式 (18.8) 计算 a_n 可得

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \quad \forall n \geq 1.$$

于是可得 $f(x)$ 的余弦级数为

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

□

习题 18.1

1. 求下列周期函数的形如 (18.1) 的 Fourier 级数:

(1) $f(x)$ 以 2 为周期, 并且

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{若 } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{若 } 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

其中 A 是常数;

(2) $f(x)$ 以 1 为周期, 且在 $[0, 1)$ 上 $f(x) = x^2$;

(3) $f(x)$ 以 2π 为周期, 且在 $[-\pi, \pi)$ 上 $f(x) = x \cos x$;

(4) $f(x) = |\cos x|$.

2. 用 $\|x\|$ 表示 x 与离它最近的整数之间的距离, 即 $\|x\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$, 求 $\|x\|$ 的形如 (18.3) 的 Fourier 级数。

3. 求定义在 $(0, 1)$ 上的函数 $f(x) = x^2$ 的正弦级数。

4. 求定义在 $(0, \pi)$ 上的函数 $f(x) = \sin x$ 的余弦级数。

5. 设三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{\ell} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{\ell} \right)$$

在 \mathbb{R} 上一致收敛于 $f(x)$, 证明这一三角级数是 $f(x)$ 的 Fourier 级数。

6. 设 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可积, 应当如何将 $f(x)$ 延拓为以 2π 为周期的函数, 使得其 Fourier 级数形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x ?$$

7. 闻名遐迩的 Goldbach 猜想宣称每个 ≥ 6 的偶数 N 都可以写成两个素数之和, 证明这一猜想等价于

$$\int_0^1 S(\alpha)^2 e(-N\alpha) d\alpha > 0,$$

其中 $S(\alpha) = \sum_{p < N} e(\alpha p)$, 这里求和条件中的 $p < N$ 表示对小于 N 的全体素数进行求和。

8. 设 $f(x)$ 是以 ℓ 为周期的函数, 且 $f(x)$ 在某个长度为 ℓ 的闭区间上单调。证明 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

9. 设 $f(x)$ 是周期函数, 并且存在正常数 L 及 $\alpha \in (0, 1]$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

证明 $\hat{f}(n) \ll |n|^{-\alpha}$ ($\forall n \neq 0$)。

§ 18.2

局部化方法

本节的目的是讨论 Fourier 级数的逐点收敛性。为了方便起见, 我们只考虑周期为 1 且属于 $\mathcal{R}[0, 1]$ 的函数 f , 此时其 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e(nx),$$

其中

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t) e(-nt) dt. \quad (18.10)$$

对于周期是一般的正实数的情形也可得到类似结论。

【引理 2.1】(Riemann–Lebesgue 引理) 设 $f \in \mathcal{R}[a, b]$ (这里 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$), 那么

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)e(\lambda x) dx = 0.$$

特别地, $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$.

证明. 先假设 $[a, b]$ 是有限区间, 我们分以下两种情况讨论:

(1) f 在 $[a, b]$ 上可积的情形. 此时 f 必在 $[a, b]$ 上有界, 即存在 $M > 0$, 使得对任意的 $x \in [a, b]$ 有 $|f(x)| \leq M$. 现设 $|\lambda| > 1$, 记 $m = \lceil \sqrt{|\lambda|} \rceil$, 并考虑区间 $[a, b]$ 的分划

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b,$$

其中 $x_j = x_0 + \frac{b-a}{m}j$, 再用 ω_j 表示 f 在 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的振幅. 于是

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)e(\lambda x) dx \right| &= \left| \sum_{j=1}^m \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)e(\lambda x) dx \right| \leq \sum_{j=1}^m \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)e(\lambda x) dx \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x) - f(x_j))e(\lambda x) dx \right| + \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x_j)e(\lambda x) dx \right| \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \omega_j \Delta x_j + \frac{mM}{\pi|\lambda|} \leq \sum_{j=1}^m \omega_j \Delta x_j + \frac{M}{\pi\sqrt{|\lambda|}}. \end{aligned}$$

由 f 可积知

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \omega_j \Delta x_j = 0,$$

从而命题得证.

(2) f 在 $[a, b]$ 上无界但 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛的情形. 不妨设 a 是 f 在 $[a, b]$ 上的唯一奇点, 那么由绝对收敛性知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)| dx < \varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)e(\lambda x) dx \right| &= \left| \int_a^{a+\delta} f(x)e(\lambda x) dx + \int_{a+\delta}^b f(x)e(\lambda x) dx \right| \\ &\leq \varepsilon + \left| \int_{a+\delta}^b f(x)e(\lambda x) dx \right|. \end{aligned}$$

因为 f 在 $[a + \delta, b]$ 上可积, 故在上式中令 $\lambda \rightarrow \infty$, 利用上面 (1) 中已证得的结论可得

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f(x) e(\lambda x) dx \right| \leq \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\varepsilon + \left| \int_{a+\delta}^b f(x) e(\lambda x) dx \right| \right) = \varepsilon,$$

再由 ε 的任意性知命题成立。

如果 $[a, b]$ 是无界区间, 我们可以不妨假设它不包含奇点, 于是可以仿照上面 (2) 中的方式完成证明, 请读者自行将细节补充完整。□

【注 2.2】 在引理 2.1 中取实部和虚部可分别得到

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

因此如果考虑以 ℓ 为周期的函数 $f(x)$ 的形如

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{\ell} \right)$$

的 Fourier 级数, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

现设 $f \in \mathcal{R}[0, 1]$, 我们来研究 $f(x)$ 的 Fourier 级数的收敛性问题。用

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e(nx)$$

表示该 Fourier 级数的部分和, 那么将 $\hat{f}(n)$ 的表达式 (18.10) 代入可得

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{n=-N}^N e(nx) \int_0^1 f(t) e(-nt) dt = \int_0^1 f(t) \sum_{n=-N}^N e(n(x-t)) dt \\ &= \int_0^1 f(t) D_N(x-t) dt, \end{aligned} \quad (18.11)$$

其中

$$D_N(y) = \sum_{n=-N}^N e(ny)$$

被称为 Dirichlet 核 (Dirichlet kernel), 它是以 1 为周期的偶函数。显然有 $D_N(0) = 2N + 1$, 并且当 $y \in (0, 1)$ 时

$$\begin{aligned} D_N(y) &= \frac{e(-Ny)(e((2N+1)y) - 1)}{e(y) - 1} = \frac{e(\frac{2N+1}{2}y) - e(-\frac{2N+1}{2}y)}{e(\frac{y}{2}) - e(-\frac{y}{2})} \\ &= \frac{\sin(2N+1)\pi y}{\sin \pi y}. \end{aligned}$$

在 (18.11) 中作变量替换 $t \mapsto x - t$ 可得

$$S_N(x) = \int_{x-1}^x f(x-t)D_N(t) dt.$$

注意到上式积分中的被积函数以 1 为周期, 所以

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t)D_N(t) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x-t)D_N(t) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x-t)D_N(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x+t) + f(x-t))D_N(t) dt. \end{aligned}$$

此外, 由 $D_N(t)$ 是偶函数知

$$\int_0^{\frac{1}{2}} D_N(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e(nt) dt = \frac{1}{2}.$$

故对任意的数 s 有

$$S_N(x) - s = \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x+t) + f(x-t) - 2s)D_N(t) dt,$$

从而 Fourier 级数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e(nx)$ 收敛于 s 当且仅当

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} dt = 0.$$

回忆起 Riemann-Lebesgue 引理, 我们知道对任意的 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} dt = 0,$$

所以 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e(nx)$ 收敛于 s 当且仅当存在 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ 使得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} dt = 0.$$

最后, 注意到

$$\frac{1}{\sin \pi t} - \frac{1}{\pi t}$$

在 $(0, \delta]$ 上有界, 从而再次应用 Riemann–Lebesgue 引理可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2s) \left(\frac{1}{\sin \pi t} - \frac{1}{\pi t} \right) \sin(2N+1)\pi t \, dt = 0.$$

因此可得如下结论。

【定理 2.3】(Riemann 局部化原理) 假设 f 是以 1 为周期的函数并且 $f \in \mathcal{R}[0, 1]$, 那么对给定的 x , f 的 Fourier 级数在点 x 处收敛于 s 当且仅当存在 $\delta > 0$ 使得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2s) \frac{\sin(2N+1)\pi t}{t} \, dt = 0. \quad (18.12)$$

上述定理表明, Fourier 级数在 x 点处的收敛性仅与 f 在 x 附近的性态有关, 考虑到 f 的 Fourier 系数依赖于 f 在整个积分区间上的值, 所以上述结论着实让人感到意外。

下面的判别法是 Riemann 局部化原理和 Riemann–Lebesgue 引理的直接推论。

【定理 2.4】(Dini 判别法) 设 f 是以 1 为周期的函数且 $f \in \mathcal{R}[0, 1]$, 如果对给定的 x 及 s , 存在 $\delta \in (0, 1)$ 使得 $\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t}$ 是关于变量 t 的属于 $\mathcal{R}[0, \delta]$ 的函数 (单独定义该函数在 $t=0$ 处的值), 那么 f 的 Fourier 级数在 x 处收敛于 s 。

当 f 具有更加良好的性质时, Dini 判别法中的 s 可用 f 确定出来。为此, 我们引入 Lipschitz 条件的概念。

【定义 2.5】 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内有定义, 若存在常数 $L > 0$ 及 $\alpha \in (0, 1]$ 使得对任意的 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 有

$$|f(x) - f(x_0 - 0)| \leq L|x - x_0|^\alpha,$$

且对任意的 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 有

$$|f(x) - f(x_0 + 0)| \leq L|x - x_0|^\alpha,$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 的附近满足 α 阶 Lipschitz 条件。

【推论 2.6】 设 f 以 1 为周期且 $f \in \mathcal{R}[0, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$. 如果 f 在 x 的附近满足 α 阶 Lipschitz 条件, 那么 f 的 Fourier 级数在 x 处收敛于 $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$. 特别地, 若 f 满足以上条件且 x 是 f 的连续点, 则 f 的 Fourier 级数在 x 处收敛于 $f(x)$.

证明. 我们来说明 $s = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ 满足定理 2.4 的条件. 为方便起见, 记

$$\varphi(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t},$$

于是由 Lipschitz 条件的定义知存在 $\delta \in (0, 1)$ 及常数 $L > 0$, 使得当 $t \in (0, \delta)$ 时有

$$|\varphi(t)| = \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| \leq 2Lt^{\alpha-1}.$$

若 $\alpha = 1$, 则 φ 在 $(0, \delta)$ 上有界, 那么当然有 $\varphi \in \mathcal{R}[0, \delta]$; 若 $\alpha \in (0, 1)$, 则由广义积分的比较判别法知 $\int_0^\delta |\varphi(t)| dt$ 收敛, 从而也有 $\varphi \in \mathcal{R}[0, \delta]$. \square

为了进一步得到更为方便简洁的判别法, 我们引入分段可微函数的概念.

【定义 2.7】 设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的一个函数, 若存在 $[a, b]$ 的一个分划

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

使得在每个子区间 $[x_{j-1}, x_j]$ ($1 \leq j \leq n$) 上定义的函数

$$g_j(x) = \begin{cases} f(x_{j-1} + 0), & \text{若 } x = x_{j-1}, \\ f(x), & \text{若 } x \in (x_{j-1}, x_j), \\ f(x_j - 0), & \text{若 } x = x_j \end{cases}$$

均在 $[x_{j-1}, x_j]$ 上可微, 则称 f 是 $[a, b]$ 上的分段可微函数.

【推论 2.8】 设 f 是以 1 为周期且在 $[0, 1]$ 上分段可微的函数, 则 f 的 Fourier 级数在每个点 x 处均收敛于 $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$. 特别地, 若 f 满足以上条件且 x 是 f 的连续点, 则 f 的 Fourier 级数在 x 处收敛于 $f(x)$.

证明. 因为 f 是分段可微的, 所以对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 极限

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} \quad \text{与} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x-h) - f(x-0)}{h}$$

必存在, 进而存在 $L > 0$ 及 $\delta > 0$, 使得对任意的 $h \in (0, \delta)$ 有

$$|f(x+h) - f(x+0)| \leq Lh \quad \text{及} \quad |f(x-h) - f(x-0)| \leq Lh.$$

这说明 f 在每个点 x 处均是 1 阶 Lipschitz 的, 从而可由推论 2.6 得到我们所需要的结论. \square

下面我们回到上节的几个例子。

【例 2.9】 在例 1.2 中, 我们对以 1 为周期的函数

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

得到了

$$f(x) \sim \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos 2\pi n x.$$

于是由推论 2.8 知

$$x^2 = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos 2\pi n x, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

利用变量替换 $x \mapsto \frac{1}{2} - x$ 可得

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{\pi^2 n^2}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

稍作整理即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^2} = \pi^2 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right), \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (18.13)$$

特别地, 在上式中取 $x = 0$ 有

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (18.14)$$

【例 2.10】 在例 1.3 中我们得到了

$$\{x\} - \frac{1}{2} \sim - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n},$$

因此由推论 2.8 知

$$\{x\} - \frac{1}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}, \quad \forall x \notin \mathbb{Z}. \quad (18.15)$$

从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n} = \pi \left(\frac{1}{2} - x \right), \quad \forall x \in (0, 1).$$

这个式子被 Abel 用来说明通项均为连续函数的函数项级数的和函数未必连续。特别地，在上式中取 $x = \frac{1}{2}$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

【例 2.11】 最后我们回到例 1.4，在那里我们对以 2π 为周期且满足

$$f(x) = \cos \alpha x, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

(其中 $\alpha \notin \mathbb{Z}$) 的函数 f 得到了

$$f(x) \sim \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right).$$

于是由推论 2.8 知

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

特别地，取 $x = \pi$ 可得

$$\cot \alpha \pi = \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha + n} + \frac{1}{\alpha - n} \right) \right). \quad (18.16)$$

这个公式的美妙之处在于，等号右边的诸分式的分母仅当 α 取整数时才有可能等于 0，但整数点恰是 $\cot \alpha \pi$ 的全部奇点。换句话说，上式将 $\cot \alpha \pi$ 的全部奇点用有理分式的形式同时展现出来。这种类型的表达式源于著名的 Mittag-Leffler 定理，我们会在《复分析》课程中学到它。

习题 18.2

1. 讨论 §18.1 习题 1 中诸函数的 Fourier 级数的收敛性。
2. 设 $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ，证明在 $(-\pi, \pi)$ 上有

$$\sin \alpha x = \frac{2 \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\alpha^2 - n^2} \sin nx.$$

3. 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

4. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 且在 $[-\pi, \pi)$ 上有 $f(x) = e^x$, 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 并由此计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$.

5. 设 N 是正整数, D_N 是 Dirichlet 核, 证明

$$\int_0^1 |D_N(x)| dx = \frac{2}{\pi^2} \log N + O(1).$$

6. (Лобачевский) 证明当 $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时有

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x + n\pi} + \frac{1}{x - n\pi} \right),$$

并利用此及第十一章命题 1.12 重新证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

从第 7 题到第 10 题是一组题, 介绍 (18.16) 的一些推论。

7. 证明在 0 的充分小的去心邻域内有

$$\cot \alpha = \frac{1}{\alpha} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} \alpha^{2k-1},$$

并由此计算 $\zeta(2)$ 与 $\zeta(4)$ 。

8. (1) 利用 (18.16) 和 Wallis 公式 (§9.6 习题 5) 证明

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right), \quad \forall x \in [0, 1].$$

(2) 证明上式对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 均成立。

9. 证明: 对任意的 $x \notin \mathbb{Z}$ 有

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

10. (Beurling) 令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} + \frac{2}{x} \right), & \text{若 } x \notin \mathbb{Z}, \\ \operatorname{sgn} x, & \text{若 } x \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

其中 $\operatorname{sgn} x$ 是符号函数。利用上题结果证明:

(1) 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 有 $f(x) \geq \operatorname{sgn} x$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - \operatorname{sgn} x) dx = 1$ 。

§ 18.3

均值定理

在上节中我们给出了 Fourier 级数的一些收敛判别法, 但这些判别法对 f 的要求较高, 例如推论 2.8 要求 f 具有分段可微性。事实上, 我们也希望在 f 的性态不是很好时去研究其 Fourier 级数, 当然此时 Fourier 级数未必收敛于函数值, 但我们可以平均意义下讨论这种收敛的可能性。

为了方便起见, 我们依然只考虑以 1 为周期的实值函数 f , 并假设它在 $[0, 1]$ 上可积, 或者 f 在 $[0, 1]$ 上有有限多个奇点但广义积分 $\int_0^1 f(x)^2 dx$ 收敛, 我们把满足这些条件的 f 的全体所成之集记作 $\mathcal{R}^2[0, 1]$ 。

首先给出 Fourier 级数的部分和在积分均值意义下的极值性质, 这一性质说明了在平方平均的意义下 Fourier 级数是函数的最佳三角级数逼近。

【命题 3.1】 设 f 以 1 为周期且 $f \in \mathcal{R}^2[0, 1]$ 。

(1) 对任意的正整数 N 及复数 α_n ($-N \leq n \leq N$) 有

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \alpha_n e(nx) \right|^2 dx \geq \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e(nx) \right|^2 dx,$$

并且等号成立当且仅当对每个 n 均有 $\alpha_n = \hat{f}(n)$ 。

(2) 我们有

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e(nx) \right|^2 dx = \int_0^1 f^2(x) dx - \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2.$$

证明. 事实上有

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \alpha_n e(nx) \right|^2 dx \\
 &= \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{n=-N}^N \alpha_n e(nx) \right) \overline{\left(f(x) - \sum_{n=-N}^N \alpha_n e(nx) \right)} dx \\
 &= \int_0^1 f^2(x) dx - 2\operatorname{Re} \int_0^1 f(x) \left(\sum_{n=-N}^N \alpha_n e(nx) \right) dx \\
 &\quad + \int_0^1 \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \alpha_n \overline{\alpha_m} e((n-m)x) dx \\
 &= \int_0^1 f^2(x) dx - 2\operatorname{Re} \sum_{n=-N}^N \alpha_n \overline{\hat{f}(n)} + \sum_{n=-N}^N |\alpha_n|^2 \\
 &= \int_0^1 f^2(x) dx - \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 + \sum_{n=-N}^N (|\hat{f}(n)|^2 - 2\operatorname{Re} \alpha_n \overline{\hat{f}(n)} + |\alpha_n|^2) \\
 &= \int_0^1 f^2(x) dx - \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 + \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n) - \alpha_n|^2,
 \end{aligned}$$

从而命题得证。 \square

【定理 3.2】(Bessel 不等式) 设 f 以 1 为周期且 $f \in \mathcal{R}^2[0, 1]$, 则对任意的正整数 N 有

$$\sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

证明. 这可从命题 3.1 (2) 推出。 \square

由 Bessel 不等式知, 在定理 3.2 的条件下, 级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$ 收敛且有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx. \quad (18.17)$$

因此作为一个副产品, 我们再次得到了 $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$, 这个结论曾作为 Riemann-Lebesgue 引理的推论在引理 2.1 中出现过。

下面我们来证明函数的 Fourier 级数在积分均值意义下的收敛性。

【定理 3.3】 设 f 以 1 为周期且 $f \in \mathcal{D}^2[0, 1]$, 则有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e(nx) \right|^2 dx = 0. \quad (18.18)$$

证明. 我们按照 [12] 的方式分以下四步来证明。

(1) 首先证明对任意的 $[a, b] \subseteq [0, 1]$, 由特征函数

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in [a, b] \\ 0, & \text{若 } x \in [0, 1] \setminus [a, b] \end{cases}$$

延拓成的以 1 为周期的函数 f 满足 (18.18)。

按照命题 3.1 (2), 我们只需证明

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

由于 $\hat{f}(0) = b - a$, 并且当 $n \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \int_0^1 \chi_{[a,b]}(x)e(-nx) dx = \int_a^b e(-nx) dx \\ &= -\frac{1}{2n\pi i} (e(-bn) - e(-an)), \end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 &= (b-a)^2 + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{4n^2\pi^2} |e(-bn) - e(-an)|^2 \\ &= (b-a)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |e((b-a)n) - 1|^2 \\ &= (b-a)^2 + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2\pi(b-a)n}{n^2}. \end{aligned}$$

应用 (18.13) 和 (18.14) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 &= (b-a)^2 + \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \pi^2 \left((b-a)^2 - (b-a) + \frac{1}{6} \right) \right) \\ &= b-a = \int_0^1 f(x)^2 dx. \end{aligned}$$

(2) 其次证明若函数 g 与 h 满足 (18.18), 那么它们的线性组合也满足 (18.18)。

这是因为对任意的 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| (\lambda g(x) + \mu h(x)) - \sum_{n=-N}^N (\widehat{\lambda g + \mu h})(n) e(nx) \right|^2 dx \\ &= \int_0^1 \left| (\lambda g(x) + \mu h(x)) - \sum_{n=-N}^N (\lambda \hat{g}(n) + \mu \hat{h}(n)) e(nx) \right|^2 dx \\ &\leq 2\lambda^2 \int_0^1 \left| g(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{g}(n) e(nx) \right|^2 dx + 2\mu^2 \int_0^1 \left| h(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{h}(n) e(nx) \right|^2 dx, \end{aligned}$$

上面最后一步用到了 $|a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ 。

(3) 接下来对 $[0, 1]$ 上的可积函数 f 证明 (18.18)。

因为 f 可积, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $[0, 1]$ 的分划

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$$

使得

$$0 \leq \bar{S} - \int_0^1 f(x) dx < \varepsilon, \quad (18.19)$$

其中 \bar{S} 是 Darboux 上和

$$\bar{S} = \sum_{j=1}^m M_j \Delta x_j$$

且 $M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$ 。若考虑定义在 $[0, 1]$ 上的函数

$$\varphi = \sum_{j=1}^m M_j \cdot \chi_{[x_{j-1}, x_j]},$$

那么

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \bar{S}.$$

将这代入 (18.19) 即得

$$0 \leq \int_0^1 (\varphi(x) - f(x)) dx < \varepsilon.$$

又由于 f 与 φ 均在 $[0, 1]$ 上有界, 故存在 $M > 0$, 使得对任意的 $x \in [0, 1]$ 有

$$|f(x)| \leq M, \quad |\varphi(x)| \leq M.$$

现将 φ 延拓为以 1 为周期的函数, 那么由前面步骤 (1) 和 (2) 中的结果知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \varphi(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{\varphi}(n)e(nx) \right|^2 dx = 0,$$

从而当 N 充分大时

$$\int_0^1 \left| \varphi(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{\varphi}(n)e(nx) \right|^2 dx < \varepsilon.$$

于是对充分大的 N 有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e(nx) \right|^2 dx \\ & \leq 2 \int_0^1 \left| (f(x) - \varphi(x)) - \sum_{n=-N}^N (\widehat{\varphi - f})(n)e(nx) \right|^2 dx \\ & \quad + 2 \int_0^1 \left| \varphi(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{\varphi}(n)e(nx) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

按照命题 3.1 (2), 上式右边第一项不超过

$$\int_0^1 (f(x) - \varphi(x))^2 dx < 2M \int_0^1 (\varphi(x) - f(x)) dx < 2M\varepsilon.$$

因此我们最终对充分大的 N 得到了

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e(nx) \right|^2 dx < 2M\varepsilon + 2\varepsilon = 2(M+1)\varepsilon.$$

这样就对 f 证明了 (18.18)。

(4) 最后, 对在 $[0, 1]$ 上有有限多个奇点但 $\int_0^1 f(x)^2 dx$ 收敛的 f 证明结论。

不妨设 0 是 f 在 $[0, 1]$ 上的唯一奇点。因为 $\int_0^1 f(x)^2 dx$ 收敛, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\int_0^\delta f(x)^2 dx < \varepsilon.$$

现记

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } \delta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{若 } 0 \leq x < \delta, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } \delta \leq x \leq 1, \\ f(x), & \text{若 } 0 \leq x < \delta, \end{cases}$$

那么 $f = f_1 + f_2$ 且 $\int_0^1 f_2^2(x) dx < \varepsilon$ 。注意到 f_1 是 $[0, 1]$ 上的可积函数，所以由步骤 (3) 知，对充分大的 N 有

$$\int_0^1 \left| f_1(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}_1(n)e(nx) \right|^2 dx < \varepsilon.$$

于是当 N 充分大时

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e(nx) \right|^2 dx \\ &= \int_0^1 \left| (f_1(x) + f_2(x)) - \sum_{n=-N}^N (\hat{f}_1(n) + \hat{f}_2(n))e(nx) \right|^2 dx \\ &\leq 2 \int_0^1 \left| f_1(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}_1(n)e(nx) \right|^2 dx + 2 \int_0^1 \left| f_2(x) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}_2(n)e(nx) \right|^2 dx \\ &< 2\varepsilon + 2 \int_0^1 f_2^2(x) dx < 4\varepsilon, \end{aligned}$$

上面倒数第二步用到了命题 3.1 (2)。

至此，定理得证。 □

将上述定理与命题 3.1 (2) 结合，我们发现 (18.17) 中的等号其实是成立的。

【定理 3.4】(Parseval 恒等式) 设 f 以 1 为周期且 $f \in \mathcal{R}^2[0, 1]$ ，则

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

在上述定理的条件下，如果将 Fourier 级数写成

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx)$$

的形式，那么由 (18.2) 知 Parseval 恒等式也即

$$\int_0^1 f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (18.20)$$

【例 3.5】 在例 1.2 中我们对以 1 为周期的函数

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

证明了

$$f(x) \sim \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos 2\pi n x,$$

因此由 (18.20) 知

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^4 dx = \frac{1}{144} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^4 n^4},$$

略作整理即得

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

【注 3.6】 设 k 是正整数。通过考察以 1 为周期的函数

$$f(x) = x^k, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

并利用 Parseval 恒等式可以归纳地证明

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} B_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!},$$

其中 B_n 是 Bernoulli 数 (参见 §10.6 习题 6), 但是这一过程颇为繁琐, 具体可参见 [1]。一个经典且便捷的方式是利用复函数 $\frac{z}{e^z - 1}$ 的幂级数展式以及 (18.16) 对应于复变量的形式, 因为这已超出了本书范围, 故不再进一步详述。

我们可对定理 3.4 作进一步的推广。

【定理 3.7】 (广义 Parseval 恒等式) 设 f 与 g 均是以 1 为周期的函数且 $f, g \in \mathcal{R}^2[0, 1]$, 则

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

证明. 对 $f + g$ 和 $f - g$ 分别应用定理 3.4 可得

$$\int_0^1 (f(x) + g(x))^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n) + \hat{g}(n)|^2,$$

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n) - \hat{g}(n)|^2.$$

两式相减即得

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{Re} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} = \operatorname{Re} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

注意到 $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}$, 因此上式右边的和式本就是实数, 从而命题得证. \square

作为本节的结束, 我们来介绍 Parseval 恒等式的两个应用, 第一个是 Fourier 级数的唯一性定理.

【命题 3.8】 设 f, g 均是以 1 为周期的连续函数, 如果对任意的 n 有 $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$, 那么 $f = g$.

证明. 对任意的 n 有 $\widehat{(f-g)}(n) = \hat{f}(n) - \hat{g}(n) = 0$, 因此利用 Parseval 恒等式可得

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = 0.$$

再由 f 与 g 的连续性知 $f = g$. \square

利用 Parseval 恒等式我们还可以证明, 无论 Fourier 级数是否收敛, 它都可以进行逐项积分的.

【命题 3.9】 设 f 以 1 为周期且在 $[0, 1]$ 上可积, 且其 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e(nx),$$

则对任意的 $[a, b] \subseteq [0, 1]$ 有

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \int_a^b e(nx) dx.$$

证明. 考虑由特征函数

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in [a, b], \\ 0, & \text{若 } x \in [0, 1] \setminus [a, b] \end{cases}$$

延拓而得的以 1 为周期的函数, 我们将它仍记作 $\chi_{[a,b]}$. 由广义 Parseval 恒等式知

$$\int_0^1 f(x) \chi_{[a,b]}(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\widehat{\chi_{[a,b]}}(n)}. \quad (18.21)$$

注意到

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(n) = \int_0^1 \chi_{[a,b]}(x) e(-nx) dx = \int_a^b e(-nx) dx,$$

故 (18.21) 也即

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \int_a^b e^{(nx)} dx.$$

□

习题 18.3

1. (Parseval 恒等式) 设 f 是以 ℓ 为周期的函数且 $f \in \mathcal{R}^2[0, \ell]$, 证明

$$\frac{1}{\ell} \int_0^\ell f(x)^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

以及

$$\frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

其中 a_n 和 b_n 是 f 的 Fourier 系数。

2. 求定义在 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(x) = x(\pi - x)$ 的正弦级数, 并对其使用 Parseval 恒等式来计算 $\zeta(6)$ 的值。
3. 证明三角级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$ 不是任何一个 Riemann 可积函数的 Fourier 级数。

等周问题 (isoperimetric problem) 是一个古老的几何问题, 它宣称在弧长相等的平面简单闭曲线中, 圆周所围出的区域具有最大的面积。也即是说, 若用 A 表示某条长为 L 的简单闭曲线所围成的区域的面积, 那么

$$4\pi A \leq L^2,$$

并且等号成立当且仅当这一简单闭曲线是圆。上面的不等式被称作等周不等式 (isoperimetric inequality)。从第 4 题到第 6 题是一组题, 在一个特殊情形下证明了该不等式, 这里所用的方法是由 A. Hurwitz^[24] 于 1902 年给出的。

4. 设 f 是以 ℓ 为周期的函数, 且在 $[0, \ell]$ 上连续可微, 如果

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{\ell} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{\ell} \right),$$

证明

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi n b_n}{\ell} \cos \frac{2\pi nx}{\ell} - \frac{2\pi n a_n}{\ell} \sin \frac{2\pi nx}{\ell} \right).$$

5. (Wirtinger) 设 f 是以 ℓ 为周期的函数, 在 $[0, \ell]$ 上连续可微, 且有

$$\int_0^{\ell} f(x) dx = 0.$$

试利用 Parseval 恒等式证明

$$\int_0^{\ell} f(x)^2 dx \leq \frac{\ell^2}{4\pi^2} \int_0^{\ell} f'(x)^2 dx,$$

其中等号成立当且仅当 $f(x) = a \cos \frac{2\pi x}{\ell} + b \sin \frac{2\pi x}{\ell}$.

6. 设平面上的简单闭曲线 C 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s) \end{cases} \quad s \in [0, L]$$

给出, 其中 s 是弧长参数, L 是 C 的弧长, x 与 y 均在 $[0, L]$ 上连续可微. 试利用面积的计算公式 (16.24) 证明等周不等式, 并说明等号成立当且仅当 C 是圆.

§ 18.4

Fourier 变换

【定义 4.1】设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的函数且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 我们记

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e(-xy) dx, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

并称 \hat{f} 为 f 的 Fourier 变换 (Fourier transform).

【例 4.2】求 $f(x) = e^{-|x|}$ 的 Fourier 变换.

解.

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|-2\pi ixy} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+2\pi iy)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(1-2\pi iy)x} dx \\ &= \frac{1}{1+2\pi iy} + \frac{1}{1-2\pi iy} = \frac{2}{1+4\pi^2 y^2}. \end{aligned}$$

□

下述反演公式 (inversion formula) 是 Fourier 变换的一个非常重要的性质。

【定理 4.3】 (反演公式) 假设函数 f 在 \mathbb{R} 上连续并且分段可微, 又设积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 则

$$f(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \hat{f}(y) e(xy) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

特别地, 如果 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)| dy$ 收敛, 那么

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e(xy) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (18.22)$$

证明. 对任意的 $A > 0$ 及 $x \in \mathbb{R}$, 考虑

$$I(A, x) = \int_{-A}^A \hat{f}(y) e(xy) dy = \int_{-A}^A dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e((x-t)y) dt.$$

按照 Weierstrass 判别法, 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ 收敛知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e((x-t)y) dt$$

对于参变量 y 在区间 $[-A, A]$ 上一致收敛, 于是

$$\begin{aligned} I(A, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int_{-A}^A e((x-t)y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} (e((x-t)A) - e(-(x-t)A)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)}{t} (e(At) - e(-At)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)}{t} \sin 2\pi At dt. \end{aligned}$$

对 $(-\infty, 0]$ 上的积分作变量替换 $t \mapsto -t$ 可得

$$I(A, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{t} \sin 2\pi At dt.$$

注意到

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\pi At}{t} dt,$$

故而

$$\begin{aligned}
 I(A, x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin 2\pi At \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin 2\pi At \, dt \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{t} \sin 2\pi At \, dt \\
 &\quad - \frac{2f(x)}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\sin 2\pi At}{t} \, dt \\
 &\stackrel{\text{记作}}{=} I_1 + I_2 - I_3.
 \end{aligned}$$

首先, f 的连续性和分段可微性蕴含了极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t}$$

的存在性, 这意味着 0 不是函数 $\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t}$ 的奇点, 因此由 Riemann–Lebesgue 引理知

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} I_1 = 0.$$

其次, 由 f 的绝对可积性知函数 $\frac{f(x+t) + f(x-t)}{t}$ 在 $[1, +\infty)$ 上绝对可积, 于是再次利用 Riemann–Lebesgue 引理可得

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} I_2 = 0.$$

最后,

$$I_3 = \frac{2f(x)}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\sin 2\pi At}{t} \, dt = \frac{2f(x)}{\pi} \int_{2\pi A}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \rightarrow 0, \quad \text{当 } A \rightarrow +\infty \text{ 时.}$$

综上便得 $\lim_{A \rightarrow +\infty} (I(A, x) - f(x)) = 0$, 从而定理得证. \square

【注 4.4】 按照 Fourier 变换的定义, (18.22) 也即

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

【例 4.5】由例 4.2 及反演公式知

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e(xy)}{1+4\pi^2y^2} dy.$$

取实部即得

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cos 2\pi xy}{1+4\pi^2y^2} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2} dy.$$

下面我们来介绍 Fourier 变换的一些基本性质。为方便起见，用记号

$$f(x) \longrightarrow \hat{f}(y)$$

表示 \hat{f} 是 f 的 Fourier 变换。

【命题 4.6】设 f 在 \mathbb{R} 上有定义且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛，那么

(1) 对任意的 $h \in \mathbb{R}$, $f(x+h) \longrightarrow \hat{f}(y)e(hy)$ 且 $f(x)e(-hx) \longrightarrow \hat{f}(y+h)$;

(2) 对任意的 $\delta > 0$, $f(\delta x) \longrightarrow \delta^{-1} \hat{f}(\delta^{-1}y)$;

(3) 若 f 在 \mathbb{R} 上可微且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx$ 也收敛，则 $f'(x) \longrightarrow 2\pi iy \hat{f}(y)$;

(4) 若 f 在 \mathbb{R} 上连续且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)| dx$ 也收敛，那么 \hat{f} 可导，并且

$$-2\pi iy \hat{f}(y) \longrightarrow \hat{f}'(y).$$

证明. (1) 和 (2) 可由 Fourier 变换的定义及变量替换直接得到。

(3) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx$ 收敛知，对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $N > 0$ ，使得对任意的 $B > A > N$ 有

$$\int_A^B |f'(x)| dx < \varepsilon.$$

于是

$$|f(B) - f(A)| = \left| \int_A^B f'(x) dx \right| \leq \int_A^B |f'(x)| dx < \varepsilon,$$

从而利用 Cauchy 收敛准则可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。同理可证 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 。进而由分部积分法知

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e(-xy) dx &= f(x)e(-xy) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi iy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e(-xy) dx \\ &= 2\pi iy \hat{f}(y). \end{aligned}$$

(4) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)| dx$ 收敛及 Weierstrass 判别法知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e(-xy) dx$$

对于参变量 y 在 \mathbb{R} 上一致收敛, 故而可交换微分运算与积分运算得到

$$\begin{aligned} \hat{f}'(y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e(-xy) dx \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} (f(x)e(-xy)) dx \\ &= -2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e(-xy) dx. \end{aligned}$$

□

【例 4.7】 设 $f(x) = e^{-\pi x^2}$, 证明 $\hat{f} = f$ 。

证明. 由命题 4.6 (4) 知

$$\hat{f}'(y) = -2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e(-xy) dx.$$

注意到 $-2\pi xf(x) = f'(x)$, 故由命题 4.6 (3) 可得

$$\hat{f}'(y) = i \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e(-xy) dx = i \cdot 2\pi i y \hat{f}(y) = -2\pi y \hat{f}(y).$$

因此若记 $g(y) = \hat{f}(y)e^{\pi y^2}$, 则有

$$g'(y) = \hat{f}'(y)e^{\pi y^2} + \hat{f}(y) \cdot 2\pi y e^{\pi y^2} = 0,$$

这意味着 $g(y)$ 是常值函数。又因为

$$g(0) = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1,$$

所以对任意的 y 有 $g(y) = 1$, 也即 $\hat{f}(y) = e^{-\pi y^2} = f(y)$ 。 □

最后, 我们来介绍卷积的 Fourier 变换。

【定义 4.8】 设 f 与 g 均是定义在 \mathbb{R} 上的函数, 若对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 下式右边的积分都收敛, 那么我们就定义 f 与 g 的卷积 (convolution) 为

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

【命题 4.9】 设 f 与 g 均是定义在 \mathbb{R} 上的连续函数, 并且 $|f|$, $|g|$, f^2 及 g^2 均在 \mathbb{R} 上可积, 则对任意的 $y \in \mathbb{R}$ 有

$$\widehat{(f * g)}(y) = \hat{f}(y)\hat{g}(y).$$

证明.

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x)e(-xy) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt \right) e(-xy) dx. \end{aligned} \quad (18.23)$$

由已知条件及 Weierstrass 判别法知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)g(t)| dt \quad \text{与} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)g(t)| dx$$

分别对参变量 x 和 t 在 \mathbb{R} 上一致收敛。此外,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)g(t)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

收敛, 因此 (18.23) 中的两个积分号可以交换, 从而有

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e(-xy) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e(-(x+t)y) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e(-ty) dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e(-xy) dx = \hat{f}(y)\hat{g}(y). \end{aligned}$$

□

习题 18.4

1. 求函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| < 1, \\ 0, & \text{若 } |x| \geq 1 \end{cases}$ 的 Fourier 变换。
2. 求函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{若 } |x| \leq \pi, \\ 0, & \text{若 } |x| > \pi \end{cases}$ 的 Fourier 变换, 并由此证明

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi y \sin xy}{1 - y^2} dy = \sin x, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

3. 试求一个定义在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的满足

$$\int_0^{+\infty} \varphi(y) \sin xy \, dy = e^{-x}, \quad \forall x > 0$$

的函数 $\varphi(y)$ 。

4. 设 $b - a > 2$,

$$f(x) = \begin{cases} x - a, & \text{若 } x \in [a, a + 1], \\ 1, & \text{若 } x \in [a + 1, b - 1], \\ b - x, & \text{若 } x \in [b - 1, b], \\ 0, & \text{若 } x < a \text{ 或 } x > b. \end{cases}$$

(1) 对任意的 $y \in \mathbb{R}$ 证明

$$|\hat{f}(y)| \leq \min \left(b - a, \frac{1}{\pi|y|}, \frac{1}{(\pi y)^2} \right).$$

(2) 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)| \, dy \ll \log(b - a)$ 。

5. (Plancherel 公式) 设 f 在 \mathbb{R} 上连续且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx$ 与 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 \, dx$ 均收敛。证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 \, dx.$$

6. 对 $f(x) = \max(1 - |x|, 0)$ 应用上题结论来计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} \, dx$ 。

7. (Poisson 求和公式) 设 f 是定义在 \mathbb{R} 上的任意阶可导的函数, 且

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < +\infty, \quad \forall k, \ell > 0. \textcircled{1}$$

试通过研究函数 $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n)$ 的 Fourier 级数来证明

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n),$$

上式右边中的 \hat{f} 是 f 的 Fourier 变换。

8. 对 $x > 0$ 记 $\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$, 利用上题结论证明

$$\theta(x) = x^{-\frac{1}{2}} \theta(x^{-1}), \quad \forall x > 0.$$

^① 满足这一条件的全部 f 所成之集被称为 Schwartz 类 (Schwartz class)。

参考文献

1. K. Alladi, C. Defant, *Revisiting the Riemann zeta function at positive even integers*, Int. J. Number Theory, **14** (2018), 1849–1856.
2. E. Artin, *The Gamma function*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1964.
3. M. Artin, *Algebra*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1991.
4. S. Banach, A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math., **6** (1924), 244–277.
5. S. Bernstein, *Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calcul des probabilités*, Commun. Soc. Math. Kharkow, **13** (2) (1912–1913), 1–2.
6. N. Bourbaki, *Functions of a real variable*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
7. ———, *General topology*, Springer-Verlag, New York, 1989.
8. 常庚哲, 史济怀, 数学分析教程 (第三版), 中国科学技术大学出版社, 合肥, 2012.
9. N. G. de Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1958.
10. H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1967. (中译本: 微分学, 高等教育出版社, 2009.)
11. R. Courant, F. John, *Introduction to calculus and analysis*, Springer-Verlag, New York, 1989.
12. A. Deitmar, *A first course in harmonic analysis (2nd ed.)*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
13. Б. П. Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Гостехиздат, 1956. (中译本: 吉米多维奇, 数学分析习题集, 人民教育出版社, 1958.)
14. J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, Inc., New York, 1960.
15. ———, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1980. (中译本: 无穷小计算, 高等教育出版社, 2012.)
16. P. Du Bois–Reymond, *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente*, J. für. Math., **79** (1875), 21–37.
17. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Наука, 1969. (中译本: 菲赫金哥尔茨, 微积分学教程, 高等教育出版社, 2006.)

18. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products (7th ed.)*, Elsevier Inc., 2007.
19. G. Green, *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, J. Reine Angew. Math., **39** (1850), 73–89; **44** (1852), 356–374; **47** (1854), 161–221.
20. G. H. Hardy, *On certain definite integrals considered by Airy and by Stokes*, Quart. J. Math., **41** (1910), 226–240.
21. G. H. Hardy, M. Riesz, *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 18, Cambridge University Press, Cambridge, 1915.
22. 华罗庚, 高等数学引论, 高等教育出版社, 北京, 2009.
23. ——, 数论导引, 科学出版社, 北京, 1957.
24. A. Hurwitz, *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, **19** (1902), 357–408.
25. J. L. W. V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math., **30** (1906), 175–193.
26. G. Klambauer, *Mathematical analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1975.
27. ——, *Problems and propositions in analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1979.
28. M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972。(中译本: 古今数学思想, 上海科学技术出版社, 2002。)
29. E. Landau, *Foundations of analysis (3rd ed.)*, Chelsea Publishing Company, New York, 1966.
30. 廖可人, 李正元, 数学分析 3, 高等教育出版社, 北京, 2015。
31. 林源渠, 方企勤, 李正元, 廖可人, 数学分析习题集, 高等教育出版社, 北京, 2015。
32. L. H. Loomis, S. Sternberg, *Advanced calculus*, Jones and Bartlett Publishers, Inc., London, 1990。(中译本: 高等微积分, 高等教育出版社, 2005。)
33. G. G. Lorentz, *Bernstein polynomials*, Chelsea Publishing Company, New York, 1986。
34. 梅加强, 数学分析, 高等教育出版社, 北京, 2011。
35. 闵嗣鹤, 严士健, 初等数论 (第三版), 高等教育出版社, 北京, 2003。
36. J. R. Munkres, *Analysis on manifolds*, Westview Press, 1991。
37. 欧阳光中, 朱学炎, 金福临, 陈传璋, 数学分析 (第三版), 高等教育出版社, 北京, 2007。
38. 潘承洞, 于秀源, 阶的估计, 山东科学技术出版社, 济南, 1983。
39. C. C. Pugh, *Real mathematical analysis*, Springer-Verlag, New York, 2001。
40. B. Riemann, *Gesammelte mathematische werke und wissenschaftlicher nachlass*, Leipzig, 1892。(中译本: 黎曼全集, 高等教育出版社, 2016。)

41. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis (3rd ed.)*, McGraw-Hill Companies, Inc., 1976.
42. I. J. Schoenberg, *On the Peano curve of Lebesgue*, Bull. Amer. Math. Soc., **44** (1938), 519.
43. M. Spivak, *Calculus on manifolds*, Westview Press, 1995.
44. E. M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier analysis: An introduction*, Princeton University Press, 2003.
45. G. G. Stokes, *On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series*, Camb. Phil. Trans., Vol. ix., Part I., 1850.
46. T. Tao, *An introduction to measure theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 126, Amer. Math. Soc., Providence, 2011.
47. E. C. Titchmarsh, *The theory of functions (2nd ed.)*, Oxford University Press, London, 1939.
48. B. L. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Z., **32** (1930), 474–475.
49. 汪林, 实分析中的反例, 高等教育出版社, 北京, 2014.
50. E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis (4th ed.)*, Cambridge University Press, 1927.
51. 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 钱定边, 数学分析习题课讲义, 高等教育出版社, 北京, 2003.
52. 杨宗磐, 数学分析入门, 科学出版社, 北京, 1958.
53. 周民强, 数学分析习题演练 (第二版), 科学出版社, 北京, 2010.
54. В. А. Зорич, Математический анализ, МЦНМО., Москва, 2002. (中译本: 卓里奇, 数学分析, 高等教育出版社, 2006.)

索引

Остроградский 公式, 119

Archimedes

~ 螺线, 74

Banach–Tarski 悖论, 2

Bessel 不等式, 145

被积函数, 13

比较判别法, 61

变量替换, 37

长度, 6

重积分, 13

Darboux

~ 上和, 14

~ 上积分, 14

~ 下和, 14

~ 下积分, 14

Dini

~ 判别法, 139

Dirichlet

~ 核, 138

单侧曲面, 111

单连通区域, 95

单形, 30

等周不等式, 152

等周问题, 152

多连通区域, 95

Fourier

~ 变换, 153

~ 级数, 131

~ 系数, 131

~ 展式, 131

反演公式, 154

分部积分法, 121

平面上的 ~, 93

分段可微函数, 140

Gauss

~ 公式, 119

~ 系数, 105

Green 公式, 93

刚体变换, 1

光滑曲面, 104

光滑曲线, 80

弧长

~ 的微分, 77

Jordan

~ 测度, 6

~ 可测集, 6

~ 零测集, 6

~ 内测度, 6

~ 外测度, 6
 积分区域, 13
 简单集合, 2
 简单曲线, 71
 矩形, 2
 卷积, 157
 Laplace
 ~ 算子, 98
 Lebesgue
 ~ 定理, 18
 ~ 零测集, 17
 Lipschitz 条件, 139
 累次积分, 26
 零容度集, 6
 Möbius
 ~ 带, 111
 面积, 6
 Parseval 恒等式, 149, 150, 152
 Peano 曲线, 10
 Plancherel 公式, 159
 Poisson 求和公式, 159
 穷竭, 57
 球坐标, 50
 ~ 变换, 50, 52
 曲面
 ~ 的第一基本量, 105
 ~ 面积, 104
 曲面积分
 第二型 ~, 113
 第一型 ~, 108

曲率, 75
 平均 ~, 75
 曲线
 ~ 的弧长, 71
 可求长 ~, 71
 曲线积分
 第二型 ~, 85
 第一型 ~, 79
 Riemann
 ~ ζ 函数, 150
 ~ 和, 13
 ~ 积分, 13, 20
 ~ 局部化原理, 139
 ~ 可积, 13
 Riemann–Lebesgue 引理, 136
 容度, 6
 Schwartz 类, 159
 Stokes 公式, 124
 三角级数, 128
 散度, 119
 ~ 定理, 119
 双侧曲面, 111
 体积, 6
 调和函数, 98
 Viviani 曲线, 78, 126
 星形线, 73, 82
 旋度, 124
 选择公理, 1
 延拓

偶性 \sim , 133

奇性 \sim , 133

余弦级数, 133

圆柱螺旋线, 74

振幅, 15

正弦级数, 133

柱坐标变换, 51

祖暅原理, 31

始于二零一八年芒种
初稿完于二零一九年小雪
第一次修订完于二零二零年立夏